高等数学应用205例

主编 李心灿
副主编 姚金华 邵鸿飞



高等教育出版社

高等数学
应用205例

主　编　李心灿
副主编　姚金华　邵鸿飞
编　著　曾庆黎　王　强　王崇寿
孙洪祥　李卫国　黄金坤
郑　权　张建伟　杨奇峰

高等教育出版社

(京)112号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学应用205例／李心灿编.—北京:高等教育出版社,1997
ISBN 7-04-005802-2

Ⅰ.高…　Ⅱ.李…　Ⅲ.高等数学-应用-范例　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第24894号

*

高等教育出版社出版
北京沙滩后街55号
邮政编码:100009　传真:64014048　电话:64054588
高等教育出版社发行
中国青年出版社印刷厂印装

*

开本850×1168　1/32　印张12.25　字数310 000
1997年8月第1版　1997年8月第1次印刷
印数0 001—5 108

定价　11.90元

本书所用主要计量单位标准符号对照

公里	km	米	m
分米	dm	厘米	cm
毫米	mm	日	d
小时	h	分	min
秒	s	吨	t
公斤	kg	克	g
毫克	mg	升	L
毫升	ml	弧度	rad

1 卡=4.185J

牛顿　N

前　言

数学教育要教给学生的不仅仅是数学知识，还要培养学生应用数学的意识、兴趣和能力，让学生学会用数学的思维方式观察周围的事物，用数学的思维方法分析、解决实际问题.

当代著名数学家、沃尔夫奖获得者P.D.拉克斯(Lax, Peter, D.)指出："目前数学在非常广泛的领域里的研究蓬蓬勃勃，而且成就辉煌.但还没有充分发挥人们的数学才华以加深数学与其它科学的相互关系.这种不平衡对于数学以及对于它的使用者都是有害的.纠正这种不平衡是一种教育工作，这必须从大学一开始就做起，微积分是最适合从事这项工作的一门课程.""在微积分里，学生可以直接体会到数学是确切表达科学思想的语言，可以直接学到科学是深远影响着数学发展的数学思想的源泉.最后，很重要的一点在于数学可以提供许多重要科学问题的光辉答案."数学家C.雷波特(Report, Cambridge)指出："应该把数学内部及外部的应用都教给学生，使他对两个方面都明白：一是数学作为科学方法的效力，一是数学作为科学所应有的统一与美.在某种意义上，把数学的思考方式传递给我们智力工作的其余部分，就是数学的一个应用."当代著名数学家、教育家、沃尔夫奖获得者H.惠特尼(Whitney Hasselr)指出："学数学意味著什么？当然是希望能用它，…最好的学习就是用，并且古今皆知仅在你有自己的想法时才有真正的学习."著名数学教育家H.弗洛登塔尔(Freudenthel, Hans)指出："数学源于现实，并且用于现实."我很赞赏他们这些观点.

毋庸讳言，从知识的学习到知识的应用不是一件简单的、自然而然就能实现的事情，没有充分地、有意识地培养、训练和实践，没有表达应用观点的教学用书，学生的应用意识、兴趣和能力是不会

形成的，然而，目前国内大部分《高等数学》教学用书中的实例或习题，不仅应用面窄，局限于几何、物理居多；而且面孔陈旧，缺乏时代感.

为了在高等数学这一门重要基础课教学中，培养学生的应用意识、兴趣和能力，引导学生用所学的数学知识、方法去观察、分析、解决实际问题，北京数学会大学委员会经过讨论，认为很有必要编写一本高等数学应用实例的教学参考书，并责成我和姚金华同志负责组织北京有关高等院校的部分教师来编写.

经过有关院校的推荐和我们的邀请，参加编写此书的同志有：王强、王崇寿、孙洪祥、李卫国、李心灿、邵鸿飞、郑权、杨奇峰、姚金华、黄金坤、张建伟、曾庆黎，并由李心灿任主编、姚金华、邵鸿飞任副主编.

本书的编写过程是：先由正副主编总体构思设计，拟出编写要求、方案、计划，并提出一批主要可供参考的文献、书籍；通过全体编者认真讨论，分工阅读，又进一步收集了大量国内外的有关文献、书籍、教材，经过挑选或改编，共初选出了近400个实例；在此基础上，由正副主编主持在北京航空航天大学经过多次集体讨论，再由各编者分工进行修改；最后由正副主编初审、筛选、统稿、编排.

本书共汇集了205个应用实例.这些实例既有物理、力学、天文、化学、生物方面的；也有医学、航空航天、工程技术方面的；还有经济、管理、日常生活方面的.其中有不少实例贴近生活，贴近时代.这些实例所用到的数学知识覆盖了高等数学的主要内容，其中也溶进了各位编者的专业知识和教学经验.这些实例，展示了高等数学在各学科领域的广泛而又有趣的应用.其中，一些较简单的实例，将使学生受到初步数学模型构建的训练，提高解决实际问题的兴趣；一些较难的实例，将使学生见识如何从实际问题归纳成数学问题，进而解决实际问题.著名科学家爱因斯坦(Einstein，Albert)有句名言："只有'热爱'才是最好的老师."我们认为应该使高等数

内 容 简 介

本书编选了205个高等数学应用实例.这些实例既有物理、力学、天文、化学、生物方面的,也有医学、航空航天、工程技术方面的,还有经济、管理、日常生活方面的.这些实例所用到的数学知识覆盖了高等数学的主要内容,不仅展示了高等数学在各学科领域的广泛应用,而且也引导读者利用其知识和方法去观察、分析、解决实际问题.

本书既可以作为高等数学教学参考书,也可以作为数学爱好者学习高等数学的补充读物.

目　录

1、我国工薪人员应纳多少税

根据中华人民共和国个人所得税法规定：个人工资，薪金所得应纳个人所得税．应纳税所得额的计算为：工资、薪金所得，以每月收入额减除费用八百元后的余额，为应纳税所得额．最后列出下面的税率表：

个人所得税税率表（工资，薪金所得适用）

级数	全月应纳税所得额	税率(%)
1	不超过 500 元的	5
2	超过 500 元到 2 000 元的部分	10
3	超过 2 000 元到 5 000 元的部分	15
4	超过 5 000 元到 20 000 元的部分	20
5	超过 20 000 元到 40 000 元的部分	25
6	超过 40 000 元到 60 000 元的部分	30
7	超过 60 000 元到 80 000 元的部分	35
8	超过 80 000 元到 100 000 元的部分	40
9	超过 100 000 元的部分	45

若某人的月工资，薪金所得为 x 元，请列出他应缴纳的税款 y 与其工资、薪金所得 x 之间的关系．

解： 按税法规定当 $x\leqslant 800$ 元时，不必纳税，∴这时 $y=0$．

当 $800<x<1\,300$ 元时，纳税部分是 $x-800$，税率为 5%，

$\therefore y=(x-800)\cdot\frac{5}{100}$；

当 $1\,300<x<2\,800$ 元时，其中 800 元不纳税，500 元应纳 5% 的税，即 $500\times\frac{5}{100}=25$（元）．再多的部分，即 $x-1\,300$ 按 10% 纳税．∴他应纳税款为 $y=25+(x-1\,300)\cdot\frac{10}{100}$（元）．依此可列出

下面的函数关系：

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 800\\ (x-800)\cdot\dfrac{5}{100}, & 800<x\leqslant 1\ 300\\ 25+(x-1\ 300)\dfrac{10}{100}, & 1\ 300<x\leqslant 2\ 800\\ 25+150+(x-2\ 800)\dfrac{15}{100}, & 2\ 800<x\leqslant 5\ 800\\ 175+450+(x-5\ 800)\dfrac{20}{100}, & 5\ 800<x\leqslant 20\ 800\\ 625+3\ 000+(x-20\ 800)\dfrac{25}{100}, & 20\ 800<x\leqslant 40\ 800\\ 3\ 625+5\ 000+(x-40\ 800)\dfrac{30}{100}, & 40\ 800<x\leqslant 60\ 800\\ 8\ 625+6\ 000+(x-60\ 800)\dfrac{35}{100}, & 60\ 800<x\leqslant 80\ 800\\ 14\ 625+7\ 000+(x-80\ 800)\dfrac{40}{100}, & 80\ 800<x\leqslant 100\ 800\\ 21\ 625+8\ 000+(x-100\ 800)\dfrac{45}{100}, & x>100\ 800\end{cases}$$

参考文献： [24].

2、外币兑换中的损失

某人从美国到加拿大去度假，他把美元兑换成加拿大元时，币面数值增加 12%，回国后他发现把加拿大元兑换成美元时，币面数值减少 12%．把这两个函数表示出来，并证明这两个函数不互为反函数，即经过这样一来一回的兑换后，他亏损了一些钱．

解： 设 $f_1(x)$ 为将 x 美元兑换成的加拿大元数，$f_2(x)$ 为将 x 加拿大元兑换成的美元数，则

$$f_1(x)=x+x\cdot 12\%=1.12x,\quad x\geqslant 0$$

$$f_2(x)=x-x\cdot 12\%=0.88x,\quad x\geqslant 0$$

而 $f_2(f_1(x))=0.88\times 1.12x=0.9856x<x$，故 f_1,f_2 不互为反函数.

思考题： 设一美国人准备到加拿大去度假，他把 1 000 美元兑换成加拿大元，但因故未能去成，于是他又将加拿大元兑换成了美元，问他亏损了多少钱？(14.4 美元).

参考文献： [1] 上册，p. 33.

3、环境温度对人体代谢率的影响

当环境温度改变时，人体代谢率也有相应的变化，实验数据如下：

环境温度/℃	…	4	10	20	30	38	…
代谢率/4185J·h⁻¹·m⁻²	…	60	44	40	40.5	54	…

试分析外界环境温度对代谢率的影响.

解： 将表中的每一对实验值在直角坐标系中画出对应的点.

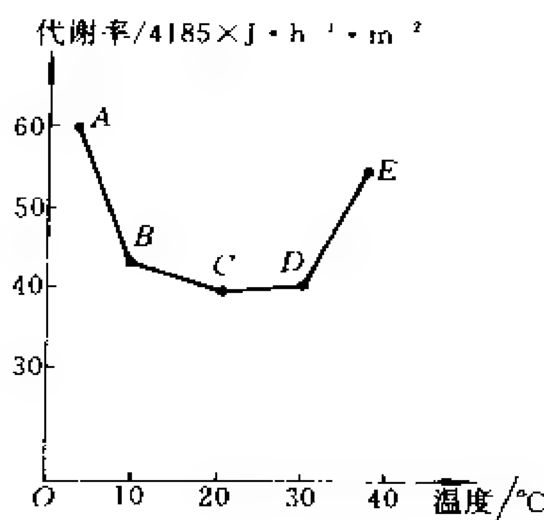


图 3　代谢率随环境温度的变化

在医学研究中，为了方便，常用折线把它们连接起来，如图3所示.

从图中可以看出，环境温度太低或太高对代谢率均有较大影响，而环境温度在20 ℃～30 ℃时，代谢率较低，并且较稳定.所以临床上做"基础代谢率"测定时，室温要保持在20 ℃～25 ℃之间，以排除环境温度的影响.

参考文献： [36]，p.3～4.

4、滑块的位置

有一油泵的曲柄连杆机构(图4)，主动轮转动时，连杆带动滑块B作往复直线运动.设曲柄OA的长为r，连杆AB的长为l，旋转的角速度是ω，开始时，曲柄OA与OB重合.求滑块的运动规律.

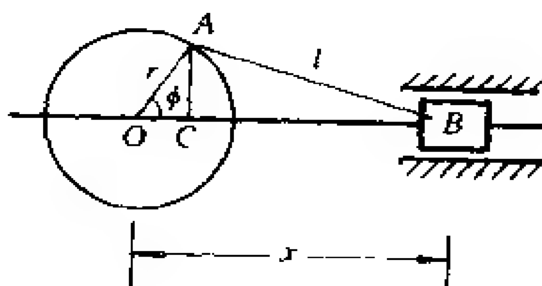


图4 曲柄连杆机构

解： 法一：设经过t秒主动轮转过的角度为φ(弧度)，此时滑块B离O点的距离为x.过A点作$AC\perp OB$，交OB于C点，则

$$OC=r\cos\varphi,AC=r\sin\varphi$$

$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}$$

于是
$$x=OC+BC=r\cos\varphi+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}$$

因为ω是角速度，$\varphi=\omega t$，所以滑块B的运动规律是$x=r\cos\omega t$

$+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}$, $t\in[0,+\infty)$

法二:在$\triangle OAB$中直接利用正弦定理,得

$$\frac{l}{\sin\varphi}=\frac{r}{\sin B}=\frac{x}{\sin[\pi-(\varphi+B)]}$$

从而

$$\sin B=\frac{r}{l}\sin\varphi$$

$$\begin{aligned}
x&=\frac{l}{\sin\varphi}\sin(\varphi+B)\\
&=\frac{l}{\sin\varphi}[\sin\varphi\cos B+\cos\varphi\sin B]\\
&=\frac{l}{\sin\varphi}\left[\sin\varphi\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi}+\cos\varphi\cdot\frac{r}{l}\sin\varphi\right]\\
&=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}+r\cos\varphi\\
&=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}+r\cos\omega t
\end{aligned}$$

参考文献: [14],p.22~23.

5、单三角脉冲的电压

脉冲发生器产生一个单三角脉冲,其波形如图5所示,写出电压U与时间$t(\geqslant 0)$的函数关系式.

解: 当$t\in\left[0,\frac{\tau}{2}\right]$时,$U=\dfrac{E}{\frac{\tau}{2}}t=\dfrac{2E}{\tau}t$;

当$t\in\left(\frac{\tau}{2},\tau\right]$时,$U-0=\dfrac{E-0}{\frac{\tau}{2}-\tau}\cdot(t-\tau)$,即

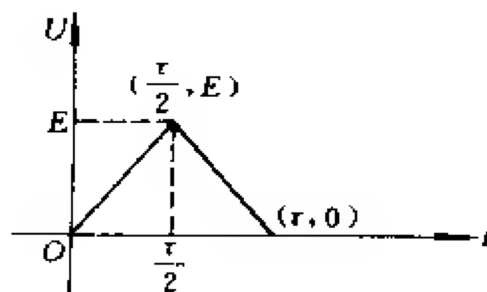


图5 单三角脉冲信号的电压

$$U=-\frac{2E}{\tau}(t-\tau)$$

当 $t\in(\tau,+\infty)$时，$U=0$.

归纳上面讨论的结果，知函数 $U=U(t)$是一个分段函数，其表达式为

$$U=\begin{cases}\frac{2E}{\tau}t, & t\in\left[0,\frac{\tau}{2}\right]\\ -\frac{2E}{\tau}(t-\tau), & t\in\left(\frac{\tau}{2},\tau\right]\\ 0, & t\in(\tau,+\infty)\end{cases}$$

参考文献： [14],p.20.

6、恒星的发光度

在天文学中，所谓一颗星的发光度，是指这颗星的全部能量输出. 粗略地说，一颗星的发光度，是对这颗星的表面亮度的一种度量. 发光度基本上是质量的函数. 有两位天文学家对某恒星进行了测试和计算，得到下面的所谓质量—发光度关系：

$$\frac{L}{L_{\odot}}=\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{r}$$

其中 L 和 M 分别是该恒星的发光度和质量，$L_{\odot}$，$M_{\odot}$分别是太阳的发光度和质量，指数 r 依赖于星球的质量，如表 6 所示. 求：

(a)当恒星的质量是太阳的 2 倍时，求该恒星的发光度(质量的函数)；

(b)当质量是太阳的 8 倍时的发光度；

(c)当恒星的质量是太阳质量的 30 倍时的发光度.

解： (a)由表 6 可知，当恒星的质量为太阳的 2 倍时，$r=4.15$，则该恒星的发光度为

$$L=L_{\odot}(2)^{4.15}\approx 17.75L_{\odot}$$

表 6　质量范围与 r

质量范围 $M/M_{\odot}$	r
1.0～1.4	4.75
1.4～1.7	4.28
1.7～2.5	4.15
2.5～5	3.95
5～10	3.38
10～20	2.80
20～50	2.30
50～100	1.90

(b)此时 $r=3.38$，该恒星的发光度为

$$L=L_{\odot}(8)^{3.38}\approx 1128.35L_{\odot}$$

(c)此时 $r=2.30$，该恒星的发光度为

$$L=L_{\odot}(30)^{2.30}\approx 2496.77L_{\odot}$$

参考文献： [1]上册，p.146.

7、利润与销量之间的函数关系

收音机每台售价 90 元，成本为 60 元.厂家为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的，每多订购一台，售价就降低 1 分(例某商行订购了 300 台，订购量比 100 台多 200 台，于是每台就降价 $0.01\times 200=2$(元)，商行可以按 88 元/台的价格购进 300 台)，但最低价为 75 元/台.

a) 把每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数；

b) 把利润 P 表示成订购量 x 的函数；

c) 当一商行订购了 1 000 台时，厂家可获利润多少？

解： a) 当 $x\leqslant 100$ 时售价为 90 元/台.

现在计算订购量 x 是多少台时售价降为 75 元/台，

$$90-75=15,\quad 15\div0.01=1\ 500$$

所以，当订购量超过 1 500 + 100 台时，每台售价为 75 元. 当订购量在 100～1 600 之间时，售价为 $90-(x-100)\cdot0.01$，因而实际售价 p 与订购量之间的函数关系为

$$p=\begin{cases}90, & x\leqslant100\\ 90-(x-100)\cdot0.01, & 100<x<1\ 600\\ 75, & x\geqslant1\ 600\end{cases}$$

b) 每台利润是实际售价 p 与成本之差

$$\therefore\ P=(p-60)x$$

c) 由 a)先计算出 $p=90-(1\ 000-100)\cdot0.01=81$.

再由 b)知

$$P=(81-60)\cdot1\ 000=21\ 000(\text{元})$$

参考文献： [23]，上册，p.92.

8、蛛网模型

在市场经济中存在这样的循环现象：若去年的猪肉生产量供过于求，猪肉的价格就会降低；价格降低会使今年养猪者减少，使今年猪肉生产量供不应求，于是肉价上扬；价格上扬又使明年猪肉产量增加，造成新的供过于求，……

据统计，某城市 1991 年的猪肉产量为 30 万吨，肉价为 6.00 元/公斤. 1992 年生产猪肉 25 万吨，肉价为 8.00 元/公斤. 已知 1993 年的猪肉产量为 28 万吨.

若维持目前的消费水平与生产模式，并假定猪肉产量与价格之间是线性关系，问若干年以后猪肉的生产量与价格是否会趋于稳定？若能够稳定，请求出稳定的生产量和价格.

解： 设第 n 年的猪肉生产量为 x_n，猪肉价格为 y_n. 由于当

年产量确定当年价格，故 $y_n=f(x_n)$，而当年价格又决定第二年的生产量，故 $x_{n+1}=g(y_n)$．在经济学中，$y_n=f(x_n)$称为需求函数，$x_{n+1}=g(y_n)$称为供应函数．产销关系呈现出如下过程：

$$x_1 \to y_1 \to x_2 \to y_2 \to x_3 \to y_3 \to x_4 \to y_4 \to \cdots$$

令 P_1 坐标为(x_1,y_1)，P_2 坐标为(x_2,y_1)

P_3 坐标为(x_2,y_2)，P_4 坐标为(x_3,y_2)

……

P_{2k-1}坐标为(x_k,y_k)，P_{2k}坐标为(x_{k+1},y_k)，$(k=1,2,\cdots)$．将点列 $P_1,P_2,P_3,\cdots$描在平面直角坐标系中会发现 P_{2k} 都满足 $x=g(y)$，P_{2k-1}都满足 $y=f(x)$．如图 8 所示．这种关系很象一个蛛网，故被称为蛛网模型．

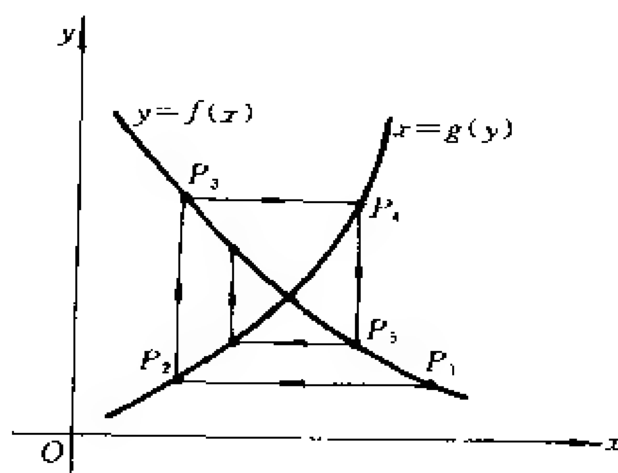


图 8　蛛网模型

现在回到我们的猪肉产销问题．将 1991 年的猪肉产量记为 x_1，1991 年的猪肉价格记为 y_1，依次类推．根据 x_i,y_i 可做出点列

$P_1(30,6)$，$P_2(25,6)$，$P_3(25,8)$，$P_4(28,8)$，$\cdots$

根据线性假设，需求函数 $y=f(x)$是直线，且 $P_1(30,6)P_3(25,8)$位于此直线上，故需求函数为

$$y_n = 18 - \frac{2}{5}x_n, n = 1, 2, \cdots \tag{1}$$

供应函数 $x = g(y)$ 也是一条直线，且 $P_2(25,6)$、$P_4(28,8)$ 位于此直线上，故供应函数为

$$x_{n+1} = 16 + \frac{3}{2}y_n, n = 1, 2, \cdots \tag{2}$$

于是我们得到如下递推关系

$$y_n = 18 - \frac{2}{5}x_n, x_{n+1} = 16 + \frac{3}{2}y_n, n = 1, 2, \cdots$$

现在来计算 x_n, y_n 的极限. 首先将(1)代入(2)，得

$$x_{n+1} = 16 + \frac{3}{2}\left(18 - \frac{2}{5}x_n\right)$$

$$= 16 + 27 - \frac{3}{5}x_n$$

由此可知

$$x_{k+1} - x_k = -\frac{3}{5}(x_k - x_{k-1})$$

$$= \left(-\frac{3}{5}\right)^2(x_{k-1} - x_{k-2}) = \cdots$$

$$= \left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1}(x_2 - x_1) \quad (k = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$$

对 k 从 1 至 n 求和

$$x_{n+1} - x_1 = \sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) = (x_2 - x_1)\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1}$$

所以

$$x_{n+1} = x_1 + (x_2 - x_1)\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1} = 30 - 5\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1}$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = 30 - 5\frac{1}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{215}{8} = 26.875(\text{万吨})$$

类似可得
$$y_{n+1}=18-\frac{32}{5}-\frac{3}{5}y_n$$

$$\begin{aligned}y_{k+1}-y_k&=-\frac{3}{5}(y_k-y_{k-1})=\cdots\cdots\\&=(y_2-y_1)\left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1}(k=1,2,\cdots)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_{n+1}-y_1&=\sum_{k=1}^{n}(y_{k+1}-y_k)\\&=(y_2-y_1)\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}y_{n+1}&=y_1+(y_2-y_1)\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1}\\&=6+2\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1}\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}y_{n+1}=6+2\frac{1}{1+\frac{3}{5}}=\frac{58}{8}=7.25(\text{元/kg})$$

通过上述分析可知,猪肉的产量和价格都会趋于稳定.猪肉产量稳定在年产26.875万吨,猪肉价格稳定在每公斤7.25元.

思考题1. 请预报1993,1995,1997年的猪肉产量与价格.(答:生产量依次为28,27.28,27.021万吨,肉价依次为6.80,7.09,7.19元/kg).

思考题2. 若需求函数为 $y=a+bx$,供应函数为 $x=c+dy$,问 a,b,c,d 满足什么条件时 x_n 和 y_n 才有极限存在?并证明此极限值恰为两条直线的交点.(答案:要求 $|bd|<1$).

参考文献: [65],p. 271.

9、Fibonacci 数列与黄金分割问题

“有小兔一对,若第二个月它们成年,第三个月生下小兔一对,以后每月生产一对小兔.而所生小兔亦在第二个月成年,第三个月生产另一对小兔,以后亦每月生产小兔一对.假定每产一对小兔必为一雌一雄,且均无死亡,试问一年后共有小兔几对?”

这是意大利数学家斐波那契(Fibonacci)在1202年所著“算法之书”(又译《算盘书》(Liberabaci))中的一个题目.他是这样解答的:若用“○”、“△”分别表示一对未成年和成年的兔子(简称仔兔和成兔),则根据题设有:

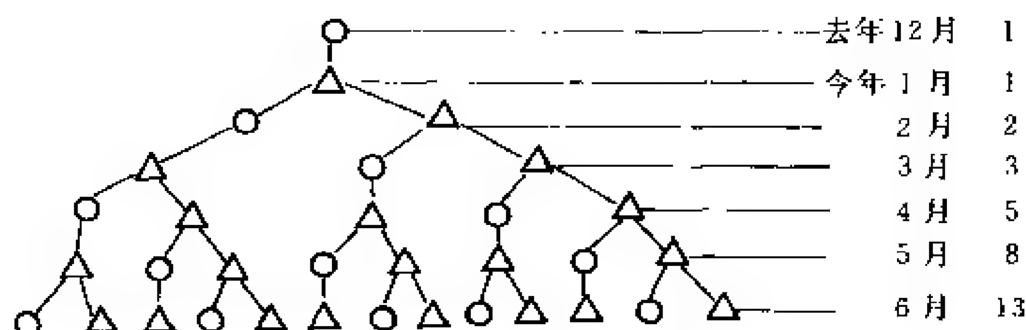


图9-1 小兔繁殖数量图

从图9-1可知,六月份共有兔子13对;还可看出,从三月份开始,每月的兔子总数恰好等于它前面两个月的兔子总数之和.按这规律可写出数列:

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233 可见一年后共有兔子233对.

这是一个有限项数列,按上述规律写出的无限项数列就叫做 Fibonacci 数列,其中的每一项称为 Fibonacci 数.

若设 $F_0=1, F_1=1, F_2=2, F_3=3, F_4=5, F_5=8, \cdots$

则此数列应有下面的递推关系:

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

这个关系可用数学归纳法来证明,其中的通项

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

是由法国数学家比内(Binet)求出的.

与 Fibonacci 数列紧密相关的一个重要极限是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618 \tag{1}$$

或者

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1.618 \tag{1'}$$

下面我们先来说明(1′)式的含义并证明之(至于(1)式的含义见本例稍后的说明).

记 $b_n=\frac{F_{n+1}}{F_n}$,则 $(b_n-1)\times 100\%$ 就是第 $(n+1)$ 月相对于第 n 月的兔子对数增长率 $(n=0,1,2,\cdots)$,例如:

$$n=0,b_0-1=\frac{1}{1}-1=0$$

$$n=1,b_1-1=\frac{2}{1}-1=1=100\%$$

$$n=2,b_2-1=\frac{3}{2}-1=0.5=50\%$$

$$n=3,b_3-1=\frac{5}{3}-1=0.66=66\%$$

……

若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在,则 $(\lim\limits_{n\to\infty}b_n-1)$ 表示许多年后兔子对数的月增长率(同时也是成兔对数及仔兔对数在许多年后的月增长率——因为成兔对数、仔兔对数各自从今年 1 月、2 月开始算起,也是 Fibonacci 数列).

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在的证明及求法如下:

证: $b_0=1$

$$b_n=\frac{F_n+F_{n-1}}{F_n}=1+\frac{F_{n-1}}{F_n}$$

$$=1+\frac{1}{b_{n-1}} \quad (n=1,2,\cdots)$$

用数学归纳法容易证明：

数列$\{b_{2n}\}$是单调增加的；数列$\{b_{2n+1}\}$是单调减少的.

又，对一切 $n\neq 0$，$\frac{3}{2}\leqslant b_n\leqslant 2$ 成立．即数列$\{b_{2n}\}$、$\{b_{2n+1}\}$是有界的.

根据“单调有界数列必有极限”的准则，知数列$\{b_{2n}\}$、$\{b_{2n+1}\}$的极限存在，分别记作 b^* 与 b_*，即

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n}=b^*, \lim_{n\to\infty} b_{2n+1}=b_*$$

分别对 $b_{2n}=1+\frac{1}{b_{2n-1}}$ 及 $b_{2n+1}=1+\frac{1}{b_{2n}}$ 的两边取极限，得

$$b^*=1+\frac{1}{b_*} \text{ 与 } b_*=1+\frac{1}{b^*}$$

两式相减，得

$$b^*-b_*=\frac{b^*-b_*}{b^*b_*}$$

由此得 $b^*-b_*=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n+1}$．若不然，则有

$$b^*b_*=1$$

而由 $b^*b_*=b_*+1$，得

$$b_*=0$$

这是不可能的(因为 $b_{2n+1}>1$)，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在，记作 b，即

$$\lim_{n\to\infty} b_n=b$$

对 $b_n=1+\frac{1}{b_{n-1}}$两边取极限，得

$$b=1+\frac{1}{b}$$

解此方程，得 $b=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，因为 $b_n\geqslant 1$，故

$$b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$$

即
$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}\approx 1.618$$

从而
$$\lim_{n\to\infty}b_n-1=0.618$$

可见许多年后兔子总对数,成兔对数及仔兔对数均以每月 61.8%(1.618－1＝0.618)的速率增长.

除了数学爱好者外,Fibonacci 数列也引起了各界人士的关注,这是因为自然、社会以及生活中的许多现象的解释,最后往往都归结到 Fibonacci 数列上来.为此,美国还专门出版了一份《斐波那契季刊》,以登载它在应用上的新发现及有关理论.下面我们来看几个实例:

例 1　蜜蜂的"家谱"

从蜜蜂的繁殖来看,蜜蜂的生长规律是很有趣的.雄蜂只有母亲,没有父亲,因为蜂后产的卵,受精的孵化为雌蜂(即工蜂或蜂后),未受精的孵化为雄蜂.人们在追溯雄蜂的祖先时,发现一只雄蜂的第 n 代祖先的数目刚好就是 Fibonacci 数列的第 n 项 F_n.如以 * 表示雄蜂,× 表示雌蜂,则有如图 9－2 所示的雄蜂家谱图.

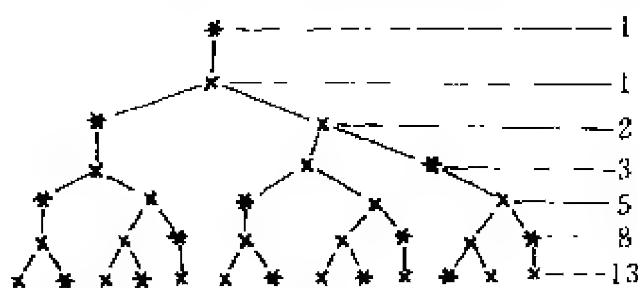


图 9－2　雄蜂家谱图

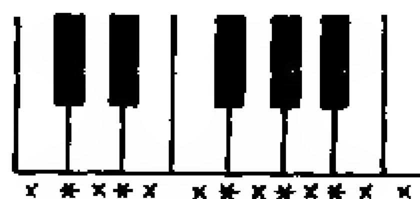


图 9－3　钢琴音阶图

例 2　钢琴音阶的排列

如图 9－3,钢琴的 13 个半音阶的排列完全与雄蜂第六代的排列情况类似,说明音调也与 Fibonacci 数列有关.

例 3 树的分枝

如果一棵树每年都在生长，第一年有两个分枝，通常第三年就有三个分枝，第四年五个，第五年八个，…，每年的分枝数都是 Fibonacci 数(见图 9－4).

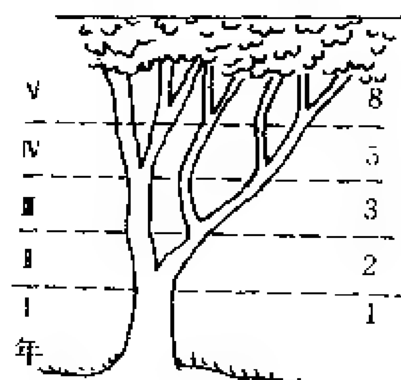
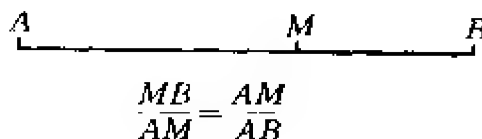


图 9－4 树的分枝图



$$\frac{MB}{AM}=\frac{AM}{AB}$$

图 9－5 按中外比分割 AB

黄金分割这一名称是由中世纪著名画家达·芬奇提出的. 所谓黄金分割其实就是按中外比分割. 即：将一条线段分成两段，使较长的线段成为较短线段与整条线段的比例中项. 这时，较短线段与较长线段之比就称为黄金比. 图 9－5 中的 M 点就是黄金分割点.

之所以叫"黄金分割"，是因为按这种比例关系分配后，用在建筑上，能使建筑物更为美观；放在音乐里，音调更加和谐悦耳；甚至许多盛开的美丽花朵以及人的健美体形也都具有"黄金分割"的特点.

那么，黄金分割与 Fibonacci 数列有何关系呢？原来，黄金分割点的位置恰好是数列 $\left\{\frac{F_n}{F_{n+1}}\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$ (见(1)式)！具体点说，在图 9－5 中，若设 $AB=a$，则 $AM=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a\approx 0.618a$，这可通过代数方法算出.

黄金分割的应用极为广泛，生产和科学实验中普遍使用的优选法——"0.618 法"就是其中重要的一种. 下面看一个实例.

例 4 工厂里某一种产品的质量取决于温度，如果温度估计在 1 000℃ 至 1 500℃ 之间，怎样试验才能找到最好的温度？

有人从 1 001℃ 开始做试验，一直试验到 1 499℃，共做了 499 次试验，而用“黄金分割”只要作 13 次试验就能取得同样的效果。其步骤是：

1）拿一张有刻度的纸条表示 1 000℃ 至 1 500℃，纸条的长记为 a，找出 a 的黄金分割点 $M_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a\approx0.618a$，它对应的温度是 1 309℃（图 9－6），以 1 309℃ 作为第一次试验，观察试验效果。

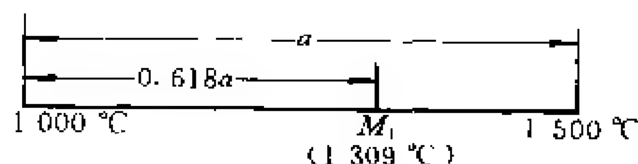


图 9－6 找出第一次试验的温度

2）将纸条对折，取 M_1 的对称点 M_2，算出 M_2 对应的温度为

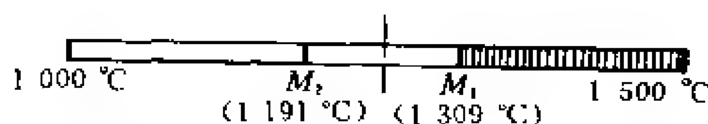


图 9－7 剪去 M_1 右边的一段

1 191℃（图 9－7），以 1 191℃ 作第二次试验，比较两次试验哪一个好：如取 1 309℃ 的试验较好，则剪去 M_2 左边的一段；如取 1 191℃ 的试验较好，则剪去 M_1 右边的一段。现设取 1 191℃ 比 1 309℃ 的试验效果好，故剪去 M_1 右边的一段（图 9－7 中阴影部分）。

3）将剩下的纸条再对折，M_2 的对称点为 M_3，所对应的温度为 1 118℃，以 1 118℃ 作第三次试验，如仍是 1 191℃ 的效果较好，则剪去 M_3 左边阴影的一段（图 9－8）。

4）剩下的纸条再对折，M_2 的对称点为 M_4，所对应的温度为

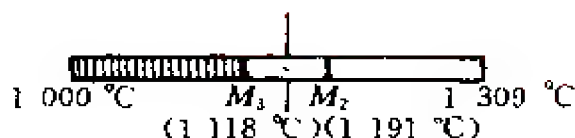


图 9－8 剪去 M_3 左边的一段

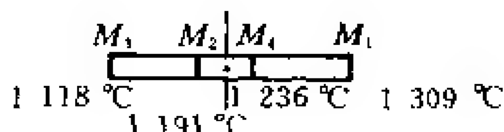


图 9－9 取 1 236℃ 作试验

1 236℃(图 9－9),于是取 1 236℃ 作第四次试验.然后再比较,再剪去不必要部分.

……,这里每次留下的纸条长度均是前一次长度的 0.618 倍.就这样依次找下去,直到找到符合质量要求的最好温度为止.

思考题: 有一条 n 级楼梯,如果每步只能跨上一级或两级,问欲登上去,共有几种走法?(答案:这是缺了 F_0 的 Fibonacci 数列,如欲登上第 n 级楼梯,共有 F_n 种不同的走法)

参考文献: [10],p.87～94,p.181～187;[12],p.76～94;[15],数学 1,p.151～154,p.292～298.

10、连续复利与"e"

某顾客向银行存入本金 p 元,n 年后他在银行的存款额是本金及利息之和.设银行规定年复利率为 r,试根据下述不同的结算方式计算顾客 n 年后的最终存款额.

(1) 每年结算一次;

(2) 每月结算一次，每月的复利率为 $r/12$；

(3) 每年结算 m 次，每个结算周期的复利率为 r/m. 证明最终存款额随 m 的增加而增加；

(4) 当 m 趋于无穷时，结算周期变为无穷小，这意味着银行连续不断地向顾客付利息，这种存款方法称为连续复利. 试计算连续复利情况下顾客的最终存款额.

解： (1)每年结算一次时，第一年后顾客存款额为：$p_1 = p + pr = p(1+r)$，

第二年后的存款额为：$p_2 = p_1(1+r) = p(1+r)^2$，

根据这种递推关系可知，第 n 年后顾客的存款额变为：

$$p_n = p(1+r)^n. \tag{1}$$

(2) 每月结算一次时，复利率为 $r/12$，共结算 $12n$ 次，故 n 年后顾客的存款额为：

$$p_n = p\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12n}.$$

(3) 每年结算 m 次时，复利率为$\frac{r}{m}$，共结算 mn 次，将 n 年后顾客的存款额记为 p_n^m，则

$$p_n^m = p\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}$$

令 $y_m = \left(1+\frac{r}{m}\right)^m$，应用二项式展开可得

$$\begin{aligned}
y_m &= \left(1+\frac{r}{m}\right)^m = 1 + m\cdot\frac{r}{m} + \frac{m(m-1)}{2!}\left(\frac{r}{m}\right)^2 \\
&\quad + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\left(\frac{r}{m}\right)^3 + \cdots \\
&\quad + \frac{m(m-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{m!}\left(\frac{r}{m}\right)^m \\
&= 1 + r + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)r^2 + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)r^3 + \cdots
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)r^m$$

$$y_{m+1}=\left(1+\frac{r}{m+1}\right)^{m+1}=1+r+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)r^2$$

$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\left(1-\frac{1}{m+2}\right)r^3+\cdots$$

$$+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\left(1-\frac{2}{m+1}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m+1}\right)r^m$$

$$+\frac{1}{(m+1)!}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\cdots\left(1-\frac{m}{m+1}\right)r^{m+1}$$

比较 y_{m+1} 与 y_m 的每一项，由于

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)<\left(1-\frac{1}{m+1}\right),\left(1-\frac{2}{m}\right)<\left(1-\frac{2}{m+1}\right),\cdots,$$

$$\left(1-\frac{m-1}{m}\right)<\left(1-\frac{m-1}{m+1}\right)$$

y_{m+1} 的每一项都大于 y_m 中的相应项，并且 y_{m+1} 比 y_m 还多出最后一项，显然最后一项大于零. 所以，$y_{m+1}>y_m$.

注意到 $p_n^m=p(y_m)^n$，$p_n^{m+1}=p(y_{m+1})^n$，可知 $p_n^m<p_n^{m+1}$. 即结算的次数越多，顾客的最终存款额也就越多.

(4) 在连续复利情况下，顾客的最终存款额为：

$$p_n=\lim_{m\to\infty}p_n^m=\lim_{m\to\infty}p\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}=pe^{rn}$$

将此式改写成 $p_n=p[1+(e^r-1)]^n$，与(1)式比较可知，连续复利相当于以年复利率 e^r-1 进行按年计息结算. 当 r 较小时，$e^r-1\approx r$. 学习了微分学以后，可以证明 $e^r-1>r(r>0)$.

思考题 1：老张在银行存入 1 000 元，复利率为每年 10%. 分别以按年结算和连续复利结算两种方式计算 10 年后老张在银行的存款额.（按年结算 $p_{10}=2\ 593.74$ 元，连续结算 $p_{10}=2\ 718.28$ 元）.

思考题 2：按照连续复利结算方式，t 年后的存款额为 $p(t)=$

pe^{rt}. $p(t)$满足微分方程

$$\begin{cases} p'(t)=rp(t), \\ p(0)=p \end{cases}$$

试说明 r 的意义，并对此微分方程作实际解释.

参考文献： [68], p. 252.

11、细菌繁殖问题

由实验知，某种细菌繁殖的速度在培养基充足等条件满足时与当时已有的数量 A_0 成正比，即 $V=kA_0$($k>0$ 为比例常数)，问经过时间 t 以后细菌的数量是多少?

解： 为了计算出 t 时的数量，我们将时间间隔$[0,t]$分成 n 等分. 由于细菌的繁殖是连续变化的，在很短的一段时间内数量的变化很小，繁殖速度可近似看作不变，因此，在第一段时间$\left[0,\frac{t}{n}\right]$内细菌繁殖的数量为：$kA_0\frac{t}{n}$，第一段时间末细菌的数量为：$A_0\left(1+k\frac{t}{n}\right)$；同样，第二段时间末细菌的数量为：$A_0(1+k\frac{t}{n})^2$；…；依此类推，到最后一段时间末细菌的数量为：$A_0\left(1+k\frac{t}{n}\right)^n$.

显然，这是一个近似值，因为我们假设了在每一小段时间$\left[\frac{i-1}{n}t,\frac{i}{n}t\right]$($i=1,2,\cdots,n$)内细菌繁殖的速度不变(同时还假设了各小段时间内只繁殖一次). 可以看出，当时间间隔分得越细(即 n 越大)时这个值越接近精确值，若对时间间隔无限细分(即 $n\to\infty$)，则可求得其精确值. 所以，经过时间 t 后细菌的总数是

$$\lim_{n\to\infty}A_0\left(1+k\frac{t}{n}\right)^n=A_0\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{kt}{n}\right)^n$$

$$\overset{\text{令}\frac{kt}{n}=\frac{1}{x}}{=\!=\!=\!=} A_0 \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{kt}$$

$$= A_0\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{kt}$$

$$= A_0 e^{kt}$$

将这个结论与例 10 中连续复利的计算公式比较，发现二者是一样的. 这绝非偶然，事实上，现实世界中不少事物的生长规律都服从这个模型，所以也称 $y=Ae^{kt}$ 为生长函数. 下面看一个实例.

例： 已知一种细菌的个数按指数方式增长，下表是收集到的数据：

天数	细菌个数
5	936
10	2 190

问：1) 开始时细菌个数是多少？

2) 如果继续以现在的速度增长下去，60 天后细菌的个数是多少？

解： 细菌繁殖服从生长函数 $y=A_0e^{kt}$. 由题目所给数据，得

$$\begin{cases}936=A_0e^{5k}\\2\,190=A_0e^{10k}\end{cases}$$

解此方程组，得 $A_0=400$，$k=0.17$. 即开始时细菌个数为 400. 按此速度增长下去，则 60 天后细菌个数为

$$y(60)=400\cdot e^{60\times 0.17}=10\ 761\ 200$$

注： 这里仅用两组数据去定 A_0，k 必有误差. 为了得到较为准确的 A_0，k 的估计值 $\hat{A}_0$，$\hat{k}$，应当多收集一些数据，然后用最小二乘法确定之.

参考文献： [1]，上册，p. 325；[8]，p. 139～140.

12、周期性静脉注射的一室模型

根据药物动力学理论，一次静脉注射剂量为 D_0 的药物后，经

过时间 t，体内血药浓度为 $C(t)=\frac{D_0}{V}e^{-kt}$，其中 $k>0$ 为消除速率常数，V 为表观分布容积．若每隔时间 τ 注射一次，试求 n 次注射后体内血药浓度 $C_n(t)$ 与第 n 次注射后的时间 t 的关系．

解： 第一次注射后，体内血药浓度为

$$C_1(t)=\frac{D_0}{V}e^{-kt},(0\leqslant t\leqslant\tau)$$

第二次注射前一瞬间，体内血药浓度为 $C_1(\tau)=\frac{D_0}{V}e^{-k\tau}$，第二次注射剂量 D_0 后一瞬间，体内血药浓度为 $C_1(\tau)+\frac{D_0}{V}=\frac{D_0}{V}e^{-k\tau}+\frac{D_0}{V}=\frac{D_0}{V}(1+e^{-k\tau})$，从该次注射时刻算起，$t$ 时刻的体内血药浓度为 $C_2(t)=\frac{D_0}{V}(1+e^{-k\tau})e^{-kt}(0\leqslant t\leqslant\tau)$．

第三次注射前一瞬间，体内血药浓度为 $C_2(\tau)=\frac{D_0}{V}(1+e^{-k\tau})e^{-k\tau}=\frac{D_0}{V}(e^{-k\tau}+e^{-2k\tau})$，第三次注射剂量 D_0 后一瞬间，体内血药浓度为 $C_2(\tau)+\frac{D_0}{V}=\frac{D_0}{V}(e^{-k\tau}+e^{-2k\tau})+\frac{D_0}{V}=\frac{D_0}{V}(1+e^{-k\tau}+e^{-2k\tau})$，从该次注射时刻算起，$t$ 时刻的体内血药浓度为

$$C_3(t)=\frac{D_0}{V}(1+e^{-k\tau}+e^{-2k\tau})e^{-kt}(0\leqslant t\leqslant\tau).$$

依此类推，第 n 次注射 D_0 后，从该次注射时刻算起，t 时刻的体内血药浓度为

$$\begin{aligned}C_n(t)&=\frac{D_0}{V}(1+e^{-k\tau}+e^{-2k\tau}+\cdots+e^{-(n-1)k\tau})e^{-kt}\\&=\frac{D_0}{V}\frac{1-e^{-nk\tau}}{1-e^{-k\tau}}e^{-kt}(0\leqslant t\leqslant\tau)\end{aligned}$$

以时间为横轴，血药浓度为纵轴，得到图 12．不难看出，在每一注射周期内，血药浓度下降的规律相同，随着注射次数 n 的增

大，体内血药浓度有上升的趋势.

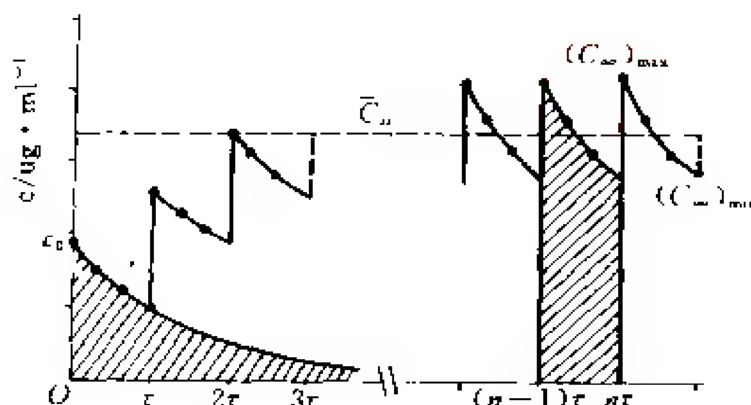


图 12　周期性静脉注射的 $C-t$ 曲线

那么，随着 n 的无限增大，血药浓度是否会无限上升呢？这就需要观察 $n\to\infty$ 时 $C_n(t)$ 的极限.

$$\lim_{n\to+\infty} C_n(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{D_0}{V}\frac{1-e^{-nk\tau}}{1-e^{-k\tau}}e^{-kt}=\frac{D_0}{V}\cdot\frac{1}{1-e^{-k\tau}}\cdot e^{-kt}$$

这就是周期性静脉注射情形下体内血药浓度的稳态水平，也称为坪浓度，记为 $C_\infty(t)$.

$$C_\infty(t)=\frac{D_0e^{-kt}}{V(1-e^{-k\tau})}\qquad(0\leqslant t\leqslant\tau)$$

显然，坪浓度的最大值、最小值和平均值分别为：

$$(C_\infty)_{max}=\frac{D_0}{V(1-e^{-k\tau})}$$

$$(C_\infty)_{min}=\frac{D_0e^{-k\tau}}{V(1-e^{-k\tau})}$$

$$\bar{C}_{ss}=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau C_\infty(t)dt=\frac{D_0}{Vk\tau}$$

临床应用：

(1) 制定给药方案

当 D_0、τ 改变时，将影响 $(C_\infty)_{max}$、$(C_\infty)_{min}$ 及 $\bar{C}_{ss}$ 的值. 因此在

制定给药方案时，应考虑剂量 D_0 和给药间隔 τ. 最理想的情况是算得的给药方案保持血药浓度在 $(C_\infty)_{min}$ 和 $(C_\infty)_{max}$ 之间. 药物的有效治疗浓度范围为最小有效浓度～最小中毒浓度. 一般地，取 $(C_\infty)_{min}$ = 最小有效浓度，$(C_\infty)_{max}$ = 最小中毒浓度.

由 $\frac{(C_\infty)_{max}}{(C_\infty)_{min}}=\frac{1}{e^{-k\tau}}$，可计算出最大给药间隔 τ，再令 $(C_\infty)_{min}=\frac{D_0e^{-k\tau}}{V(1-e^{-k\tau})}=C_e$，其中 C_e 为最小有效血药浓度，则剂量 $D_0=C_eV(e^{k\tau}-1)$.

(2) 负荷剂量

为了使血药浓度尽快达到临床有效的水平，医生常希望第一次给药后血药浓度即达到坪浓度，然后每隔时间 τ 给以维持剂量 D_0，使血药浓度维持在坪浓度附近. 这样，第一次剂量需大些，称负荷剂量或冲击剂量，记为 D_0^*.

令 $\frac{D_0^*}{V}e^{-k\tau}=\frac{D_0}{V(1-e^{-k\tau})}e^{-k\tau}$， 得 $D_0^*=\frac{D_0}{1-e^{-k\tau}}$.

可见，负荷剂量应是维持剂量的 $1/(1-e^{-k\tau})$ 倍.

值得指出的是，临床医生常以维持剂量的 2 倍为负荷剂量，这相当于 $\frac{1}{1-e^{-k\tau}}=2$，即 $\tau=T_{1/2}=\frac{\ln 2}{k}$，即仅当给药间隔等于或接近于半衰期时，这样做才合乎要求，否则便不妥.

参考文献： [36], p. 247～251; [39], p. 185～189.

13、产品利润中的极限问题

已知生产 x 对汽车挡泥板的成本是 $C(x)=10+\sqrt{1+x^2}$（美元），每对的售价为 5 美元. 于是销售 x 对的收入为 $R(x)=5x$.

a) 出售 $x+1$ 对比出售 x 对所产生的利润增长额为 $I(x)=$

$[R(x+1)-C(x+1)]-[R(x)-C(x)]$. 当生产稳定、产量很大时，这个增长额为 $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)$，试求这个极限值；

b) 生产了 x 对挡泥板时，每对的平均成本为 $\dfrac{C(x)}{x}$，同样当产品产量很大时，每对的成本大致是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{C(x)}{x}$，试求这个极限值.

解： a) $I(x)=[5(x+1)-(10+\sqrt{1+(1+x)^2})]$

$$-[5x-(10+\sqrt{1+x^2})]$$

$$=5+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+(1+x)^2}$$

求 $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)$，实质上是求

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+(1+x)^2})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2-[1+(1+x)^2]}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+(1+x)^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+(1+x)^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2}}=-1$$

$\therefore\quad \lim\limits_{x\to+\infty} I(x)=5-1=4$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{C(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10+\sqrt{1+x^2}}{x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{10}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)=1$$

参考文献： [25]，上册，p.173.

14、CO_2 的吸收

空气通过盛有 CO_2 吸收剂的圆柱形器皿，已知它吸收 CO_2 的量与 CO_2 的百分浓度及吸收层厚度成正比. 今有 CO_2 含量为 8% 的空气，通过厚度为 10 厘米的吸收层后，其 CO_2 含量为 2%，问：(1) 若通过的吸收层厚度为 30cm，出口处空气中 CO_2 的含量是多少？(2) 若要使出口处空气中 CO_2 的含量为 1%，其吸收层厚度应为多少？

解： 设吸收层厚度为 $d$cm. 现将吸收层分成 n 小段，每小段吸收层的厚度为$\frac{d}{n}$cm.

已知吸收 CO_2 的量与 CO_2 的百分浓度及吸收层厚度成正比. 今有 CO_2 含量为 8% 的空气，通过第一小段吸收层后，吸收 CO_2 的量为 $k\cdot 8\%\cdot\frac{d}{n}$，空气中 CO_2 的含量为 $8\%-k8\%\frac{d}{n}=8\%\left(1-k\frac{d}{n}\right)$；通过第二小段吸收层后，吸收 CO_2 的量为 $k8\%\left(1-k\frac{d}{n}\right)\cdot\frac{d}{n}$，空气中 CO_2 的含量为 $8\%\left(1-k\frac{d}{n}\right)-k8\%\left(1-k\frac{d}{n}\right)\frac{d}{n}=8\%\left(1-k\frac{d}{n}\right)^2$；……

依此类推，通过第 n 小段吸收层后，空气中 CO_2 的含量为 $8\%\left(1-k\frac{d}{n}\right)^n$.

当 $n\to\infty$时，即将吸收层无限细分，通过厚度为 $d$cm 的吸收层后，出口处空气中 CO_2 的含量为：

$$\lim_{n\to\infty}8\%\left(1-k\frac{d}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}8\%\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{n}{kd}}\right)^{-n/kd}\right]^{-kd}$$

$$=8\%e^{-kd}$$

已知通过厚度为 10 厘米的吸收层后，其 CO_2 含量为 2%，即 $8\%e^{-k\times 10}=2\%$，得 $k=\ln 2/5$.

（1）若通过的吸收层厚度为 30cm，即 $d=30$cm，则出口处空气中 CO_2 的含量为：$8\%e^{-\frac{\ln 2}{5}\times 30}=\frac{8\%}{2^6}=0.125\%$；

（2）要使出口处空气中 CO_2 的含量为 1%，则 $8\%e^{-k\times d}=8\%\times e^{-\frac{\ln 2}{5}\times d}=1\%$，即 $2^{d/5}=8$． ∴ $\frac{d}{5}=3, d=15$cm，

此时吸收层厚度为 15cm.

参考文献： [40].

15、利用逐次逼近方法求解开普勒方程

开普勒方程

$$x=q\sin x+a\ (0<q<1, a \text{ 是常数})$$

是用来确定行星在其轨道上的位置的．任取一个数 x_0，作如下逐次迭代数列

$$x_1=q\sin x_0+a, x_2=q\sin x_1+a,$$
$$\cdots, x_{n+1}=q\sin x_n+a, \cdots$$

证明这个数列的极限存在，且此极限恰好是开普勒方程的唯一解．

解： 我们熟知，数列 $\{x_n\}$ 有极限的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $m>n>N$ 时，有

$$|x_m-x_n|<\varepsilon$$

这就是著名的关于数列极限的柯西收敛准则．

下面我们对于迭代数列 $\{x_n\}$ 应用柯西收敛准则，证明数列有极限．

由 $x_2 - x_1 = q(\sin x_1 - \sin x_0) = 2q\sin\frac{x_1 - x_0}{2}\cos\frac{x_1 + x_0}{2}$，

注意到 $|\sin x| \leqslant |x|$ 及 $|\cos x| \leqslant 1$，有

$$|x_2 - x_1| \leqslant q|x_1 - x_0| = q\lambda$$

其中 $\lambda = |x_1 - x_0|$ 是常数. 同理，

$$|x_3 - x_2| \leqslant q|x_2 - x_1| \leqslant q^2\lambda$$

依次进行下去，可得

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant q^n\lambda \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

因此，当 $m > n$ 时，

$$\begin{aligned}|x_m - x_n| &\leqslant |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| \\ &+ \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leqslant (q^{m-1} + q^{m-2} + \cdots + q^n)\lambda \\ &< \frac{q^n}{1-q}\lambda\end{aligned}$$

由于 $0 < q < 1$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}\lambda = 0$$

这样，对于任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，使当 $m > n > N$ 时，

$$|x_m - x_n| < \frac{q^n}{1-q}\lambda < \varepsilon$$

根据柯西收敛准则，数列 $\{x_n\}$ 的极限存在.

以下证明此极限是开普勒方程的解，最后证明解的唯一性.

若设 $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$，则在等式 $x_{n+1} = q\sin x_n + a$ 中令 $n \to \infty$，由 $\sin x$ 的连续性得

$$\xi = q\sin\xi + a$$

即 ξ 确实是开普勒方程的解.

不难证明，这个 ξ 是开普勒方程的唯一解. 事实上，若假设 ξ' 是开普勒方程的另一个解，即

$$\xi' = q\sin\xi' + a$$

则

$$|\xi-\xi'|=q|\sin\xi-\sin\xi'|\leqslant q|\xi-\xi'|$$

但 $0<q<1$,故上式当且仅当 $\xi=\xi'$ 时才成立.

这就说明用此题中描述的逐次逼近法求解开普勒方程是合理的.

思考题: 一般地,对于方程

$$x=\varphi(x)$$

给定一个初值 x_0,代入右端可算得一个 $x_1=\varphi(x_0)$,再将 x_1 代入右端,又可得到 $x_2=\varphi(x_1)$,…,如此继续下去,会得到一个数列 $\{x_k\}$,其中

$$x_{k+1}=\varphi(x_k),\qquad k=0,1,2,\cdots$$

$\{x_k\}$ 称为迭代数列,$\varphi(x)$ 称为迭代函数.

试证明:若 $\varphi(x)$ 满足条件

1° 当 $x\in[a,b]$ 时,$\varphi(x)\in[a,b]$;

2° 存在正数 $L<1$,使对任意 $x\in[a,b]$,

$$|\varphi'(x)|\leqslant L<1$$

则 $x=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一的根 ξ,且对任意的初值 $x_0\in[a,b]$,迭代数列 $x_{k+1}=\varphi(x_k)(k=0,1,2,\cdots)$ 收敛于 ξ.

我们可以依据上述结论求方程的根.例如,求方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x=1.5$ 附近的近似根(准确到 10^{-3}).

令 $f(x)=x^3-x^2-1$,由 $f(1.5)=0.125$,$f(1.4)=-0.216$,再根据闭区间上连续函数的介值定理知,在 $[1.4,1.5]$ 内有 $f(x)=0$ 的一个根.

将原方程化为 $x=\sqrt[3]{x^2+1}$,则迭代函数为 $\varphi(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$.对 $x\in[1.4,1.5]$,$|\varphi'(x)|=|2x/3(x^2+1)^{2/3}|<1$.取初值 $x_0=1.5$,则迭代数列

$$x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k^2+1},(k=0,1,2,\cdots)$$

必收敛.所得数列如下

$$x_0 = 1.5, x_1 = 1.481248, x_2 = 1.4727057$$
$$x_3 = 1.4688173, x_4 = 1.467048, x_5 = 1.466243$$
$$x_6 = 1.4658768, x_7 = 1.4657102$$

故可取所求近似根为

$$\xi \approx 1.466$$

参考文献： [57],p.63—64;[62],p.185—190.

16、你知道在分形几何中的 Koch 雪花吗

在分形几何中常提及的 Koch 雪花，可通过递归方法生成. 设

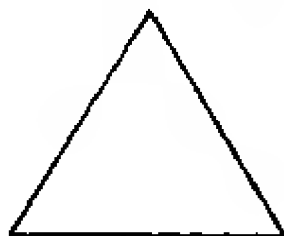


图 16-1 $P_1 = 3$, $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

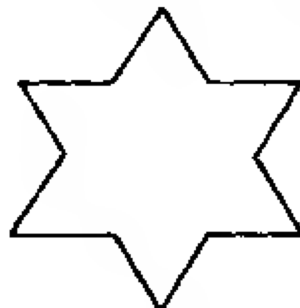


图 16-2 $P_2 = \frac{4}{3}P_1$, $A_2 = A_1 + \sqrt{3}\cdot\frac{1}{9}A_1$

有单位边长正三角形，如图 16-1，则其周长为 $P_1 = 3$，面积为 $A_1 = \sqrt{3}/4$. 将每边三等分，以中间三分之一段为边向外做正三角形. 如图 16-2，每一条边生成四条新边，新边长为原边长的$\frac{1}{3}$，同时，生成的三个新三角形，每个的面积为原三角形面积的$\frac{1}{9}$，故总周长 $P_2 = \frac{4}{3}P_1$，总面积 $A_2 = A_1 + 3\cdot\frac{1}{9}\cdot A_1$，依次进行下去，得

$$P_3 = \frac{4}{3}P_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 P_1$$

$$A_3 = A_2 + 3\left\{4\left[\left(\frac{1}{9}\right)^2 A_1\right]\right\}$$

……

试讨论当 $n\to\infty$ 时周长 P_n 和面积 A_n 的极限.

解: 如图 16－3 和 16－4 所示，为求通项 P_n 和 A_n 的表达式，



图 16－3 每条边生成四条新边



图 16－4 四条新边共生成四个新的小三角形

注意递归中:(1) 每一条边生成四条新边;(2) 下一步，四条新边共生成四个新的小三角形，得到

$$P_n=\frac{4}{3}P_{n-1}=\cdots=\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}P_1,n=1,2,\cdots$$

$$A_n=A_{n-1}+3\left\{4^{n-2}\left[\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}A_1\right]\right\}$$

$$=A_1+3\cdot\frac{1}{9}A_1+3\cdot4\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2A_1+\cdots$$

$$+3\cdot4^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}A_1$$

$$=A_1\left\{1+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^2+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}\right]\right\}$$

$$n=2,3,\cdots$$

于是，

$$\lim_{n\to\infty}P_n=+\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}A_n=A_1\left\{1+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{9}}\right\}=A_1\left(1+\frac{3}{5}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{5}$$

思考题: 若将平面单位边长正三角形推广到空间中单位棱长正四面体. 开始时，四面体面积 $S_1=\sqrt{3}$，体积 $V_1=\frac{\sqrt{2}}{12}$. 之后，在四面体的每个面上三条中位线构成小正三角形，以这样的小正三

角形为底向外做小正四面体.于是,

$$S_2=\frac{3}{2}S_1, V_2=V_1+4\cdot\left(\frac{1}{8}\right)\cdot V_1$$

依次进行下去.试讨论当 $n\to\infty$ 时面积 S_n 和体积 V_n 的极限(答案:

$$S_n=\frac{3}{2}S_{n-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}S_1\to+\infty,$$

$$V_n=V_{n-1}+4\cdot6^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}\cdot V_1$$

$$=V_1\left\{1+\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}\right]\right\}\to\frac{\sqrt{2}}{4}).$$

参考文献: [52],p.265~273.

17、巧分蛋糕

妹妹小英过生日,妈妈给做了一块边界形状任意的蛋糕(见图17-1).哥哥小明见了也想吃,小英指着蛋糕上一点对哥哥说,你能过这点切一刀,使切下的两块蛋糕面积相等,便把其中的一块送给你.小明苦想了半天,终于用刚刚学过的高等数学知识初步解决了这个问题.你知道他用的是什么办法吗?

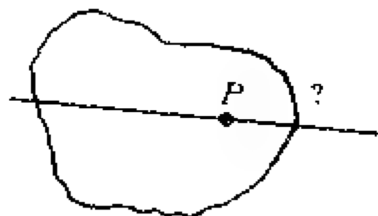


图 17-1 能切成相等的两块吗?

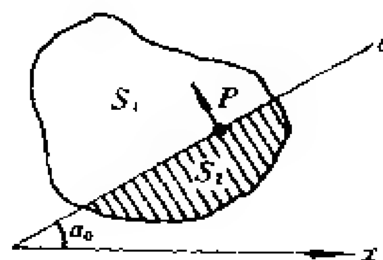


图 17-2 α_0 时 $S_1>S_2$

分析: 问题归结为如下一道几何证明题.

已知平面上一条没有交叉点的封闭曲线(无论什么形状),P 是曲线所围图形上任一点.求证:一定存在一条过 P 的直线,将这图形的面积二等分.

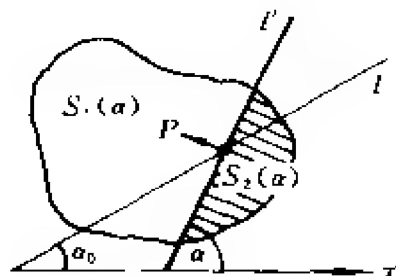


图 17－3　旋转成 α 角

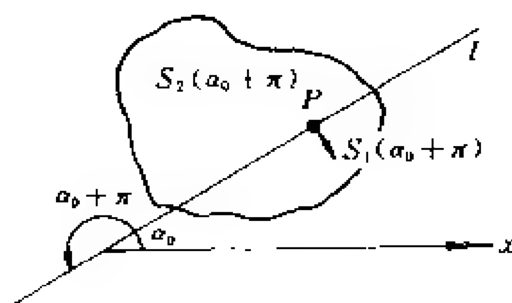


图 17－4　旋转 180°后

证明:

1. 过 P 点任作一直线 l,将曲线所围图形分为两部分,其面积分别记为 S_1、S_2.若 $S_1=S_2$(此种情况很难办到),则 l 即为所求;若 $S_1\neq S_2$,则不妨设 $S_1>S_2$(此时 l 与 x 轴正向的夹角记为 α_0,见图 17－2),下面对此种情况证明之.

2. 以 P 点为旋转中心,将 l 按逆时针方向旋转,面积 S_1、S_2 就连续地依赖于角 α 变化,记为 $S_1(\alpha)$、$S_2(\alpha)$,并设 $f(\alpha)=S_1(\alpha)-S_2(\alpha)$.如图 17－3 所示.

3. 函数 $f(\alpha)$在$[\alpha_0,\alpha_0+\pi]$上连续,且在端点异号:

$$f(\alpha_0)=S_1(\alpha_0)-S_2(\alpha_0)>0$$

$$f(\alpha_0+\pi)=S_1(\alpha_0+\pi)-S_2(\alpha_0+\pi)$$
$$=S_2(\alpha_0)-S_1(\alpha_0)<0$$

(旋转 180°后的情况见图 17－4)根据零点定理,必存在一点 $\xi\in(\alpha_0,\alpha_0+\pi)$,使 $f(\xi)=0$,即,使 $S_1(\xi)-S_2(\xi)=0$,或 $S_1(\xi)=S_2(\xi)$.过 P 作直线,使之与 x 轴正向的夹角成 ξ,该直线即为所求.

注: 实际上小明只证明了这样的直线一定存在,究竟如何找到 ξ 角还有待研究,留给读者去思考吧!

18、抛物镜聚焦问题

有一抛物镜与一平面(记为 xOy)的交线为抛物线,其方程为 $y=x^2$,光线沿平行于 y 轴的方向射入,碰到镜面后反射,试研究反射线的轨迹.

解: 如图 18.设 P 为入射点,G 为过 P 点的切线与 y 轴的交点,F 为反射线与 y 轴的交点.从图上可以得出如下几何结论:

1) $\angle FPG$ 是反射角 β 的余角;

2) $\angle FGP$ 等于入射角 α 的余角.

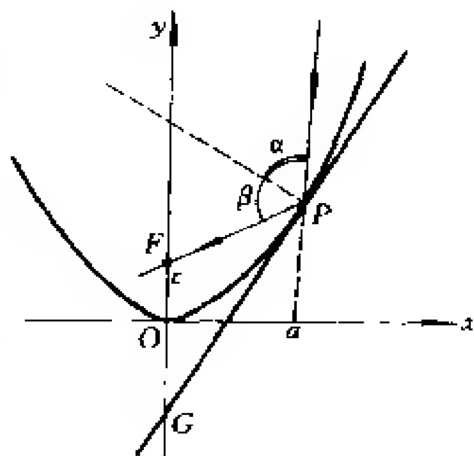


图 18 反射线都过点 F

根据反射定律,$\angle FPG=\angle FGP$,从而 $FG=FP$.用 a 表示 P 点的横坐标,则其纵坐标 $y=a^2$.用 c 表示 F 点的纵坐标,于是据勾股定理有

$$PF^2=a^2+(a-c)^2$$

切线 PG 的方程为

$$\begin{aligned} y &= l(x)=f'(a)(x-a)+f(a) \\ &= 2a(x-a)+a^2 \end{aligned}$$

在 $x=0$ 处 $l(0)=-2a^2+a^2=-a^2$,此即 G 点的纵坐标.由此可知 FG 的长为 $c-(-a^2)=c+a^2$,或 $PF=c+a^2$.于是有

$$a^2+(a^2-c)^2=(c+a^2)^2$$

展开平方项,消去共同项,两边加上 $2a^2c$ 并除以 a^2 得

$$4c=1,\text{即 } c=\frac{1}{4}$$

这说明,对所有点 P,点 F 的位置都相同.即,一切与 y 轴平行的射线经镜面反射后都经过点 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$,由解析几何知,此点正是抛

物线 $y=x^2$ 的焦点.

从很远的星球上发来的光线是非常接近于平行的.因此,若抛物镜的轴指向某颗星星,则所有的光线都反射到焦点,利用这个原理人们制出了反射式望远镜,用于天文台观察天体.

太阳光线几乎是平行的,因此可用一个抛物镜很好地聚焦,太阳灶、太阳能热水器就是利用这个原理制成的.

反之,若把光源放在焦点处,则经此凹镜反射后的光线都平行于 y 轴,探照灯、汽车前灯、手电筒就是利用这个性质才把光线集中射向远处某一方向的.

参考文献: [2],p.126~128;[15],物理2,p.87~88.

19、导数在经济学中的含义

经济学家经常把一个函数的导数称为该函数的边际值.例如,某工厂生产一种产品,它的成本函数是 $y=f(x)$,即生产 x 单位产品所花费的成本是 $f(x)$元.现在生产了 $x+\Delta x$ 单位产品,所用的成本是 $f(x+\Delta x)=y+\Delta y$.于是每多生产一单位产品,平均要用成本$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$元,称$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$为边际成[illegible]际成本表示了在生产 x 单位产品与 $x+\Delta x$ 单位产品之间,每[illegible]产一单位产品所需成本的近似值.它在经济学中的重要性是利用它可以较快估计或预测比现状再多生产一单位产品所需的成本.

当函数 $y=f(x)$代表收入时,它的导数 $f'(x)$就是边际收入,它可以估计商人在销售了 x 单位商品后,再多销售一单位商品所得收入的近似值.

当函数 $y=f(x)$代表利润时,$f'(x)$就是边际利润,它可以估计商人在销售了 x 单位商品后再多销售一单位商品所得利润的近似值.

例(1) 某企业生产一种产品，每天的总利润 $P(x)$(元)与产量 x(吨)之间的函数关系为

$$P(x)=250x-5x^2$$

其边际利润 $P'(x)=250-10x$.

在 $x=10$ 时，$P'(10)=150$(元). 它表示，在每天生产 10 吨的基础上，再多生产 1 吨，总利润将增加 150 元.

在 $x=25$ 时，$P'(25)=0$，说明当每天产量是 25 吨时，再多生产 1 吨，总利润几乎没有变化，这一吨产量并没有产生利润.

在 $x=30$ 时，$P'(30)=-50$，表明产量在 30 吨/天时，再多生产 1 吨，总利润就要减少 50 元.

这说明并非生产的产品数量越多，利润越高.

例(2) 某酸乳酪商行发现它的收入函数 $R(x)$与成本函数 $C(x)$分别为

$R(x)=12x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}$ 与 $C(x)=3x^{\frac{1}{2}}+4$，$0\leqslant x\leqslant 5$，x 的单位是千升，$R(x)$、$C(x)$以千元计.

它的边际成本 $m_C=C'(x)=\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，它随 x 的增大而减小，即产量越高，成本越低. 当 x 为 1 千升时，$m_C=\dfrac{3}{2}$元(从$C(1.001)-C(1)=0.00149$ 千元$=1.49$ 元，可看出 m_C 是非常接近实际值的). 而当 $x=4$ 千升时，$m_C=\dfrac{3}{4}$元. 它表明在生产 1 千升基础上再多生产 1 升，需成本 1.5 元，而在生产了 4 千升时，再多生产 1 升，仅需成本 0.75 元. 那么是否生产越多，赚的钱也越多呢？从收入函数 $R(x)$来看. 边际收入

$$m_R=12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{2}\sqrt{x}=\frac{3}{2}\cdot\frac{4-x}{\sqrt{x}}$$

当 $x=4$ 千升时，再多生产 1 升总收入几乎没有变化(实际上反而下降). 从下面计算可以看出：

$$R(4)=12\times2-8=16(\text{千元})$$
$$R(4.001)=15.9999963(\text{千元})$$

到底生产多少量赚钱最多？这要从利润函数来看.

$$P(x)=R(x)-C(x)=9x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}-4$$

边际利润

$$m_P=\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{2}\sqrt{x}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3-x}{\sqrt{x}}$$

从 m_P 可以看到，当 $x<3$ 时，每多生产 1 升均会使总利润增加；$x=3$ 时，再多生产 1 升，总利润差不多没有变化；当 $x>3$ 时，生产越多，总利润下降. 因而商行的产品产量应定在 3 千升. 下面是些具体的数据：

$C(2)=8.244$　　$R(2)=14.146$　　$P(2)=5.9$

$C(3)=9.196$　　$R(3)=15.588$　　$P(3)=6.392$

$C(4)=10$　　$R(4)=16$　　$P(4)=6$

注意：$m_p(x)>0$，仅表明总利润在递增，并不表明赚钱，这可从下面例子中看到：

例(3)　某糕点商生产某种糕点的收入函数 $R(x)$ 与成本函数 $C(x)$ 分别是

$$R(x)=\sqrt{x}(\text{千元}),C(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}+1}(\text{千元})$$

$1\leqslant x\leqslant15$. x 的单位是百公斤. 问他应生产多少公斤糕点才不赔钱？

解：　利润函数 $P(x)=R(x)-C(x)=\sqrt{x}-\dfrac{x+3}{\sqrt{x}+1}$，只有当 $P(x)=0$ 时才不赔钱，$P(x)>0$ 时会赚钱.

$$P(x)=\frac{x+\sqrt{x}-(x+3)}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$$

当 $x=9$(百公斤)时才不赔钱；$x<9$ 时，赔钱，$x>9$ 时赚钱. 而

$$m_p = P'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+1)^2}$$

它恒大于0.边际利润大于0,表明多生产可以提高总利润(包含减少亏损的含义),本题中,当 $x<900$ 公斤时,多生产可以减少亏损,因为这时的总利润小于零.直到900公斤后,才能真正赚钱.

参考文献: [25],上册,p.212~214,p.261;
[26],p.119~123.

20、人在月球上能跳多高

某人身高2米,在地面上可跳过与其身高相同的高度.假设他以同样的初速度在月球上跳,请问能跳多高?又,为了能在月球上跳过2米,他需要多大的初速度?

解: 在地面上跳高,就是克服地球引力把身体"抛"到高处.这里跳过了2米,是指把人体的重心提高到了2米.粗略地讲,人体的重心约在身高的一半偏上一点处,故,若把人体当作质点来看,则可视跳高为以初速 v_0 把位于(身高 $\times\frac{1}{2}$)处的一质点铅直上抛.为了求出所跳高度与时间 t 的函数关系,建立如图20所示的坐标系.

由 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-g$ 及 $v(0)=v_0$

得
$$v(t) = -gt + v_0 \tag{1}$$

由 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v(t)$ 及 $x(0)=2\times\frac{1}{2}=1$

得
$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + 1 \tag{2}$$

在月球上跳高的情况与此类似,不同的只是这里的 g 由月面上的重力加速度 g_m 所代替,若记月球上的速度及位置函数分别为

v_m、x_m(因题设初速相同,故仍记月球上的初速为 v_0),则有

$$v_m(t) = -g_m t + v_0 \qquad (3)$$

$$x_m(t) = -\frac{1}{2}g_m t^2 + v_0 t + 1 \qquad (4)$$

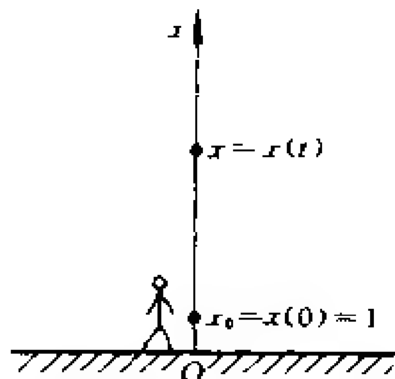


图 20 跳高示意图

由(4)式知,为求此人在月球上能跳多高,需分别求出初速 v_0 及跳到最高处所需时间.

现初速 v_0 与地球上的相同,故可由(1)、(2)式求之:

因跳到最高处时 $v(t)=0$,故 $v_0 = gt$,于是 $t=\frac{v_0}{g}$. 又,此人在地球上跳了 2 米高,故有

$$2 = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0}{g}\right) + 1$$

由此得

$$2g = v_0^2, v_0 = \sqrt{2g} \approx 4.428\text{m/s} \qquad (5)$$

(于是此人在地面上跳到 2m 高所用时间为 $t=\frac{v_0}{g}=\sqrt{\frac{2}{g}}\approx 0.45\text{s}$)

再求在月面上以初速 v_0 跳到最高处所用的时间 t_m:

由(3)式及 $v_m(t)=0$,得 $v_0 = g_m t_m$,即 $\sqrt{2g} = g_m t_m$,由此可得 $t_m = \frac{\sqrt{2g}}{g_m}$ (6)

将(5)、(6)两式代入(4)式,便有

$$\begin{aligned} x_m &= -\frac{1}{2}g_m\left(\frac{\sqrt{2g}}{g_m}\right)^2 + \sqrt{2g}\left(\frac{\sqrt{2g}}{g_m}\right) + 1 \\ &= \frac{g}{g_m} + 1 = \frac{9.8054}{1.5545} + 1 \\ &\approx 7.3078(\text{m}) \end{aligned}$$

即,在月球上能跳过的高度约为 7.3078 米.

用与上面完全类似的推导可以得出，在月球上跳 2m 高所需初速为$\sqrt{2g_m}\approx1.763$m/s(见(5)式)，所用时间为$\sqrt{\frac{2}{g_m}}\approx1.13$s.

比较 $t=0.45$s 与 $t=1.13$s 不难看出，同样是跳 2 米高，在月球上所需时间比在地面上要慢一个因子 0.4(0.45÷1.13≈0.398)，这个结论具有普遍性，可用下面的地月定理来证明.

地月定理：设 $x(t)$是"地面上的运动"*，则

$$x_m(t)=x(kt) \tag{7}$$

是在"月面上的运动"*，这里 $k=\sqrt{\frac{g_m}{g}}\approx0.398$.

证：对(7)式两端求导，则有

$$x'_m(t)=v_m(t)=kv(kt)$$

再对 t 求导，且利用$\frac{dv}{dt}=-g$ 得

$$a_m=\frac{dv_m(t)}{dt}=k\frac{dv(kt)}{dt}=k(-kg)$$

$$=-k^2g=-\left(\sqrt{\frac{g_m}{g}}\right)^2\cdot g=-\frac{g_m}{g}\cdot g=-g_m$$

因此，$x_m(t)$满足月面运动方程.　　　证毕.

公式(7)揭示了地、月两种运动之间的内在联系：地面运动改变到月面运动时，时间变慢了一个因子 0.4. 据此原理，如果我们想看看模拟的月面运动，只需用正常速度的 0.4 倍放映地面运动的电影即可.

*：地面运动系指一质点在接近地面处，在重力影响下，且仅有重力作用的垂直运动. 月面运动的概念与此类似，不再重述.

参考文献： [2]，p.145～149；[15]，天文 1，p.99～100.

21、拉船靠岸问题

如图 21 所示，在离水面高度为 h(米)的岸上，有人用绳子拉船靠岸. 假定绳长为 l(米)，船位于离岸壁 s(米)处，试问：当收绳速度为 v_0(m/s)时，船的速度、加速度各是多少？

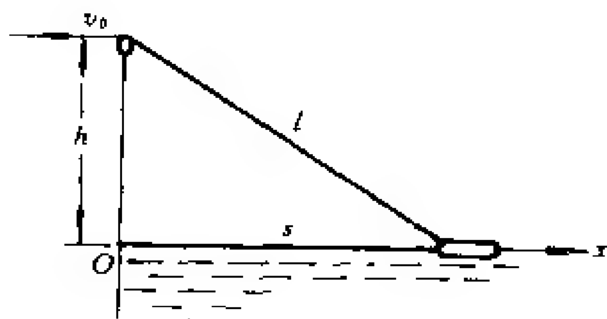


图 21　当船靠近岸时，v 与 a 都不断加大

解：　l、h、s 三者构成了直角三角形，由勾股定理得

$$l^2 = h^2 + s^2 \tag{1}$$

两端对时间求导，得

$$2l\frac{dl}{dt} = 0 + 2s\frac{ds}{dt}$$

由此得

$$l\frac{dl}{dt} = s\frac{ds}{dt} \tag{2}$$

l 为绳长，按速度定义，$\frac{dl}{dt}$ 即为收绳速度 v_0，船只能沿 s 线在水面上行驶逐渐靠近岸壁，因而$\frac{ds}{dt}$应为船速 v，将它们代入(2)式得船速

$$v = \frac{l}{s}v_0 \tag{3}$$

利用(1)式消去 l，得

$$v=\frac{\sqrt{h^2+s^2}}{s}v_0(\text{m/s}) \tag{4}$$

(4)中 h、v_0 均为常数，只有 s 是变量．按加速度定义

$$\begin{aligned} a &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \\ &= \left(-\frac{h^2}{s^2\sqrt{h^2+s^2}}v_0\right)v \end{aligned}$$

将(4)式代入上式，得

$$a=-\frac{h^2v_0^2}{s^3}(\text{m/s}) \tag{5}$$

(这里的负号表明加速度的方向与 x 轴正向相反．事实上，船速 v、收绳速度 v_0 的方向也与 x 轴正向相反．)

由(4)与(5)式可知，船速与船的加速度均与船的位置有关，它们是变化的，当船靠近岸时，船速与加速度都不断增大．细心的读者，当您在公园划船需要交船了，服务员用钩子把船勾住往岸边拉时，您是否注意到了这一现象呢(服务员用的“劲”——即收绳速度一样，您却感到船速越来越快)?

参考文献： [13],p.51.

22、陷波电路问题

将一个电感为 L 的线圈与一电容为 C 的电容器相并联，试研究此电路阻抗的变化．这里角频率 ω 在 0 到 $+\infty$ 之间变化，并假定线圈的阻抗等于零．

在电学中已证明，称作陷波电路的这种电路其阻抗是

$$Z=L\omega/(1-LC\omega^2)$$

显然，除去 $\omega=1/\sqrt{LC}$ 外，对 ω 的任意正值，阻抗 Z 都有定义．Z 的导数为

$$\frac{dZ}{d\omega}=\frac{L(1-LC\omega^2)+2L^2C\omega^2}{(1-LC\omega^2)^2}=\frac{L(1+LC\omega^2)}{(1-LC\omega^2)^2}$$

分子不可能等于零,因此,Z 既没有极大值,也没有极小值.

Z' 总是正的,因而 Z 是单调增的.

当 $\omega=0$ 时,$Z'=L$,说明过原点的半切线的斜率是 L.

当 $\omega\to\frac{1}{\sqrt{LC}}$ 时,$|Z|\to+\infty$;当 $\omega\to+\infty$ 时,$Z\to0$,由此得到它的变化表:

表 22　函数 Z 的性态

ω	0	$\left(0,\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{LC}},+\infty\right)$	$+\infty$
Z'	L	+		+	0
Z	0	↗　　$+\infty$		$-\infty$　　↗	0

Z 的图形如下(图 22).

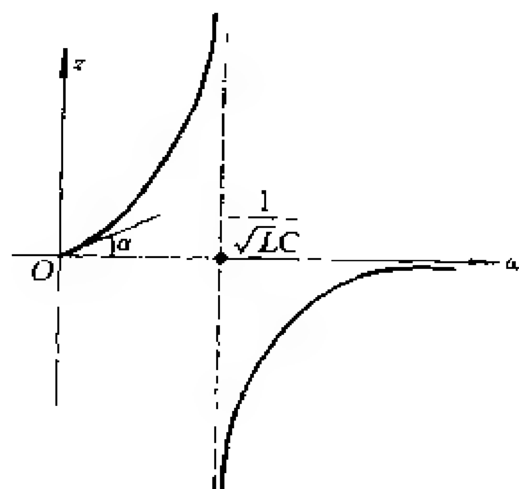


图 22　陷波电路阻抗变化图

我们看到,阻抗先是非负的,接着变成非正的.当 $LC\omega^2=1$(即 $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$)时,阻抗无穷大,这就是得名陷波电路的理由.这种

电路在无线电中经常用到.

参考文献： [4],p.145~146.

23、经济量的弹性问题

高等数学中讲过的函数改变量与函数变化率是绝对改变量与绝对变化率.从实践中我们体会到,仅仅研究函数的绝对改变量与绝对变化率还是不够的.例如,商品甲、乙的单价分别为 10 元和 1 000元,它们各涨价 1 元,尽管绝对改变量一样,但各与其原价相比,两者涨价的百分比却有很大的不同:商品甲涨了 10%,而商品乙仅涨了 0.1%.因此,我们还有必要研究函数的相对改变量与相对变化率.

定义 1 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导,称函数的相对改变量$\frac{\Delta y}{y_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{f(x_0)}$与自变量的相对改变量$\frac{\Delta x}{x_0}$之比当 $\Delta x\to 0$ 时的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x_0}{y_0}=f'(x_0)\cdot\frac{x_0}{f(x_0)}$$

为 $f(x)$在点 x_0 处的相对变化率或弹性.记作

$$\left.\frac{\mathrm{E}y}{\mathrm{E}x}\right|_{x=x_0},\text{或}\quad\frac{\mathrm{E}f(x_0)}{\mathrm{E}x}.$$

对一般的 x,若 $f(x)$可导,则有$\frac{\mathrm{E}y}{\mathrm{E}x}=f'(x)\frac{x}{f(x)}$,是 x 的函数,称为 $f(x)$的弹性函数.

函数 $f(x)$在点 x 的弹性$\frac{\mathrm{E}f(x)}{\mathrm{E}x}$反映随 x 的变化 $f(x)$变化幅度的大小,也就是 $f(x)$对 x 变化反应的强烈程度或灵敏度.

$\frac{\mathrm{E}f(x_0)}{\mathrm{E}x}$表示在点 x_0 处,当 x 产生 1% 的改变时,$f(x)$近似

地改变$\frac{Ef(x_0)}{Ex}$%.

在市场经济中,经常要分析一个经济量对另一个经济量相对变化的灵敏程度,这就是经济量的弹性.例如,一般来说,商品的需求量对市场价格的反应是很灵敏的,刻划这种灵敏程度的量就是需求弹性.

定义 2 以 Q 表示某商品的需求量,P 表示其市场价格,Q 与 P 的关系称为该商品的需求函数,记作 $Q=f(P)$.

定义 3 设某商品的需求函数 $Q=f(P)$在 P_0 点可导,称极限

$$\lim_{\Delta P\to 0}\left(-\frac{\Delta Q/Q_0}{\Delta P/P_0}\right)=-f'(P_0)\frac{P_0}{f(P_0)}$$

为该商品在 P_0 点的需求弹性或需求弹性系数,记作

$$\eta\Big|_{P=P_0}=\eta(P_0)=-f'(P_0)\frac{P_0}{f(P_0)}$$

(由于 $Q=f(P)$为单调减少函数,ΔQ 与 ΔP 异号,P_0、Q_0 为正数,于是$\frac{\Delta Q/Q_0}{\Delta P/P_0}$及 $f'(P_0)\frac{P_0}{f(P_0)}$皆为负数,为了用正数表示需求弹性,故在定义中加了一个负号.)

例 1: 设某商品的需求函数为 $Q=e^{-\frac{P}{5}}$,求

1) 需求弹性函数;

2) $P=3$、5、6 时的需求弹性

解: 1) $Q'=-\frac{1}{5}e^{-\frac{P}{5}}$

$$\eta(P)=-\left(-\frac{1}{5}e^{-\frac{P}{5}}\right)\cdot\frac{P}{e^{-\frac{P}{5}}}=\frac{P}{5}$$

2) $\eta(3)=\frac{3}{5}=0.6$, $\eta(5)=1$, $\eta(6)=1.2$

分析:

$\eta(5)=1$,说明当 $P=5$ 时,需求变动的幅度与价格变动的幅度相同;

$\eta(3)=0.6<1$,说明当 $P=3$ 时,需求变动的幅度小于价格变动的幅度.即此时价格上涨 1%,需求只减少 0.6%;

$\eta(6)=1.2>1$,说明当 $P=6$ 时,需求变动的幅度大于价格变动的幅度.即此时价格上涨 1%,需求减少 1.2%.

例 2: 某产品滞销,准备以降价扩大销路,如果该产品的需求弹性在 1.5~2 之间,试问当降价 10%时,销售量能增加多少?

解: 因 $\eta(P)\approx\dfrac{-\dfrac{\Delta Q}{Q}}{\dfrac{\Delta P}{P}}$,由题设条件,得

$$1.5\approx\frac{-\dfrac{\Delta Q}{Q}}{-10\%}$$

于是 $\dfrac{\Delta Q}{Q}\approx15\%$;

又由 $2\approx\dfrac{-\dfrac{\Delta Q}{Q}}{-10\%}$ 得 $\dfrac{\Delta Q}{Q}\approx20\%$

所以,销售量约能增加 15—20%.

例 3: 某高档商品,因出口需要,拟用提价的办法压缩国内销售量的 20%,该商品的需求弹性系数在 1.5—2 之间,问应提价多少?

解: 由题设条件,得

$$1.5\approx\frac{-(-20\%)}{\dfrac{\Delta P}{P}},\quad 即\frac{\Delta P}{P}\approx13.3\%$$

又由 $\qquad 2\approx\dfrac{-(-20\%)}{\dfrac{\Delta P}{P}}$ 得 $\dfrac{\Delta P}{P}\approx10\%$

所以,该商品应提价 10—13.3%.

下面我们用需求弹性去分析总收益(或市场销售总额)的变化.

总收益 R 是商品价格 P 与销售量 Q 的乘积,即 $R=P\cdot Q=P\cdot f(P)$,于是

$$R'=f(P)+Pf'(P)=f(P)\left[1+f'(P)\cdot\frac{P}{f(P)}\right]$$
$$=f(P)(1-\eta) \tag{1}$$

由(1)式知:

1) 若 $\eta<1$,需求变动的幅度小于价格变动的幅度.此时,$R'>0$,R 递增.即价格上涨,总收益增加;价格下跌,总收益减少.

2) 若 $\eta>1$,需求变动的幅度大于价格变动的幅度.此时,$R'<0$,R 递减.即价格上涨,总收益减少;价格下跌,总收益增加.

3) 若 $\eta=1$,需求变动的幅度等于价格变动的幅度.此时,$R'=0$,总收益取得最大值.

综上所述,总收益的变化受需求弹性的制约,随商品需求弹性的变化而变化,其关系如图 23 所示.

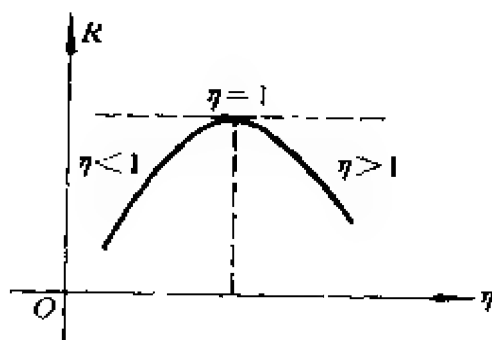


图 23 总收益与需求弹性的关系

例 4: 设某商品的需求函数为 $Q=f(P)=12-\frac{P}{2}$.

1) 在 $P=6$ 时,若价格上涨 1%,总收益是增加还是减少?将变化百分之几?

2) P 为何值时总收益最大?最大总收益是多少?

解: 1) 由 $\eta(P)=-Q'\frac{P}{Q}=-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{P}{12-P/2}=\frac{P}{24-P}$,得 $\eta(6)=\frac{1}{3}<1$,所以价格上涨 1%,总收益将增加.

下面求 R 增加的百分比,即求 R 的弹性.

由　$R'=f(P)(1-\eta)$　　得 $R'(6)=6$

由　$R=12P-\dfrac{P^2}{2}$　　得 $R(6)=54$

于是

$$\left.\frac{ER}{EP}\right|_{P=6}=R'(6)\frac{6}{R(6)}=6\times\frac{6}{54}=\frac{2}{3}\approx0.67$$

即当 $P=6$ 时，价格上涨 1%，总收益约增加 0.67%.

2) $R'=12-P$

令 $R'=0$，则 $P=12$，$R(12)=72$

故当 $P=12$ 时总收益最大，最大总收益为 72.

注：这里主要就需求对价格的弹性作了简介，关于其它经济量的弹性，读者可参阅[7]、[8]、[9]等有关经济数学的专著.

参考文献：[7]，p. 197～201，p. 204～207；[8]，p. 317～322；[9]，p. 125～130.

24、航空摄影问题

一飞机在离地面 2 公里的高度，以每小时 200 公里的速度飞临某目标之上空，以便进行航空摄影. 试求飞机飞至该目标上方时摄像机转动的速度.

解：　坐标系的选择如图 24 所示：把目标取为坐标原点，飞机与目标的水平距离为 x 公里，则有

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{2}{x}$$

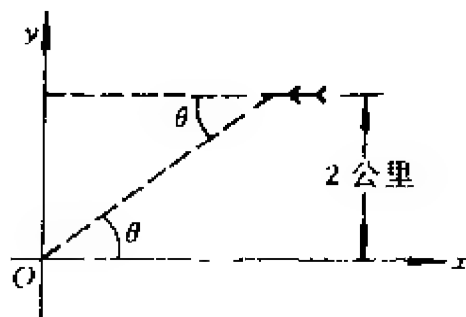


图 24　从高空拍摄目标 0

由于 x 与 θ 都是时间 t 的函数，将等式两边分别对 t 求导，可得

$$\sec^2\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}=-\frac{2}{x^2}\cdot\frac{dx}{dt}$$

或
$$\frac{d\theta}{dt}=-2\cdot\frac{\cos^2\theta}{x^2}\cdot\frac{dx}{dt}=-\frac{2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{x^2+4}\cdot\frac{dx}{dt}$$
$$=-\frac{2}{x^2+4}\frac{dx}{dt}$$

现 $x=0(\mathrm{km})$，$\frac{dx}{dt}=-200(\mathrm{km/h})$（负号表示 x 在减小），故有

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{-2}{4}\cdot(-200)=100(\mathrm{rad/h})$$

即角速度为 100 弧度/小时，化为角度就是

$$\frac{100}{60\times60}\times\frac{180}{\pi}=\frac{5}{\pi}(\text{度/秒})$$

参考文献： [14]，p.334～335.

25、飞机的降落曲线

在研究飞机的自动着陆系统时，技术人员需要分析飞机的降落曲线．根据经验，一架水平飞行的飞机，其降落曲线是一条三次抛物线．如图 25 所示，已知飞机的飞行高度为 h，飞机的着陆点为原点 O，且在整个降落过程中，飞机的水平速度始终保持为常数 u．出于安全考虑，飞机垂直加速度的最大绝对值不得超过$\frac{g}{10}$，此处 g 是重力加速度．

(1) 若飞机从 $x=x_0$ 处开始下降，试确定出飞机的降落曲线．

(2) 求开始下降点 x_0 所能允许的最小值．

解： 设飞机降落时在铅直平面内飞行，其降落曲线是该铅直平面内的一条平面曲线．以飞机着陆点为原点，以铅直面与地面的

交线为 x 轴建立平面直角坐标系，y 表示飞机的高度，如图 25.

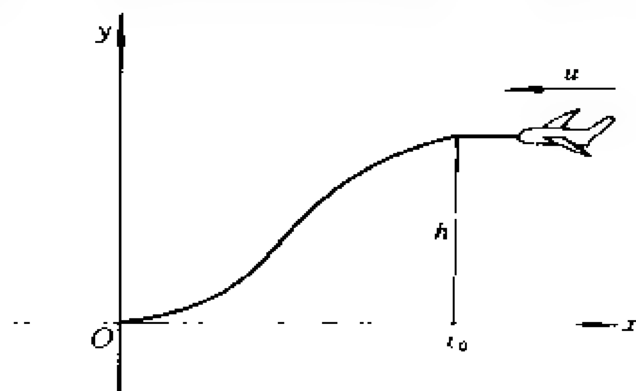


图 25 降落曲线

(1) 设飞机的降落曲线为

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

由题设条件有

$$y(0) = 0, y(x_0) = h$$

由于飞机的飞行曲线是光滑的，即 $y(x)$ 具有连续的一阶导数，所以 $y(x)$ 还要满足

$$y'(0) = 0, y'(x_0) = 0$$

将上述四个条件代入 y 的表达式：

$$\begin{cases} y(0) = d = 0 \\ y'(0) = c = 0 \\ y(x_0) = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = h \\ y'(x_0) = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c = 0 \end{cases}$$

解此方程组得到 $a = -\dfrac{2h}{x_0^3}, b = \dfrac{3h}{x_0^2}, c = d = 0$，飞机的降落曲线为

$$y = -\frac{2h}{x_0^3}x^3 + \frac{3h}{x_0^2}x^2 = -\frac{h}{x_0^2}\left(\frac{2}{x_0}x^3 - 3x^2\right) \qquad (1)$$

(2) 飞机的垂直速度是 y 关于时间 t 的导数，故

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{h}{x_0^2}\left(\frac{6}{x_0}x^2-6x\right)\frac{dx}{dt}$$

其中$\frac{dx}{dt}$是飞机的水平速度，据题设$\frac{dx}{dt}=u$，因此

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{6hu}{x_0^2}\left(\frac{x^2}{x_0}-x\right)$$

垂直加速度为

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{6hu}{x_0^2}\left(\frac{2x}{x_0}-1\right)\frac{dx}{dt}=-\frac{6hu^2}{x_0^2}\left(\frac{2x}{x_0}-1\right) \tag{2}$$

将垂直加速度记为 $a(x)$，则

$$|a(x)|=\frac{6hu^2}{x_0^2}\left|\frac{2x}{x_0}-1\right|,x\in[0,x_0]$$

因此，垂直加速度的最大绝对值为

$$\max_{x\in[0,x_0]}|a(x)|=\frac{6hu^2}{x_0^2}$$

根据设计要求，有

$$\frac{6hu^2}{x_0^2}\leqslant\frac{g}{10}$$

此时 x_0 必须满足

$$x_0\geqslant u\cdot\sqrt{\frac{60h}{g}}$$

所以，x_0 所能允许的最小值为 $u\cdot\sqrt{\frac{60h}{g}}$.

通过上述分析可知，飞机降落所需的水平距离不得小于 $u\sqrt{\frac{60h}{g}}$. 例如当飞机以水平速度每小时 540km、高度 1 000m 飞临机场上空时

$$x_0=\frac{540\times1\,000}{3\,600}\sqrt{\frac{60\times1\,000}{9.8}}\approx11\,737(\mathrm{m})$$

即飞机所需的降落距离不得小于 11 737m.

参考文献： [66].

26、飞机俯冲时机翼影子的速度

一架飞机沿抛物线 $y=x^2+1$ 的轨道向地面俯冲，如图 26 所示，x 轴取在地面上．机翼到地面的距离以 100m/s 的固定速度减少．问机翼离地面 2 501 米时，机翼影子在地面上运动的速度是多少(假设太阳光线是铅直的)

解： 机翼到地面的距离以 100 m/s 的速度递减，所以机翼垂直下降的速度是

$$\frac{dy}{dt}=-100$$

(取负号是因为下降，方向向下)．又因为太阳光是垂直的，太阳到地面的距离比飞机到地面的距离要大得多，所以，机翼影子在地面的运动速度就是飞机机翼的水平速度$\frac{dx}{dt}$，故而本题是求当 $y=2\ 501$ m 时，$\frac{dx}{dt}=?$

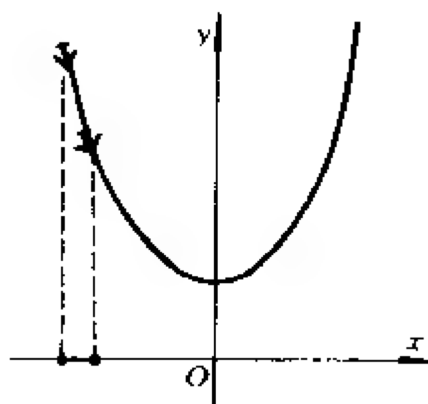


图 26 飞机俯冲时，机翼影子的运动速度

∵
$$y(t)=1+x^2(t) \tag{1}$$
两边对 t 求导，即有
$$\frac{dy}{dt}=2x\frac{dx}{dt} \tag{2}$$
由(1) $x(t)=\sqrt{y(t)-1}$，当 $y=2\ 501$ 时 $x=-50$(米)．把$\frac{dy}{dt}=-100$，$x=-50$ 代入(2)即得

$$\frac{dx}{dt}=1(\text{米/秒})$$

参考文献： [25]，下册，p.23.

27、人影移动的速率

某人高 1.8 米，在水平路面上以每秒 1.6 米的速率走向一街灯，若此街灯在路面上方 5 米，当此人与灯的水平距离为 4 米时，人影端点移动的速率为多少？

解： 这是一个相关变化率的问题．一般地，设 $x = x(t)$ 及 $y = y(t)$ 都是可导函数，而变量 x 与 y 间存在某种关系，从而变化率 $\frac{dx}{dt}$ 与 $\frac{dy}{dt}$ 间也存在一定关系，这两个相互依赖的变化率称为相关变化率．

如果我们由几何学或物理学等方面的知识，得到 x 与 y 间的一个函数关系 $y = f(x)$，且 $f(x)$ 可导，那么由复合函数的求导法则，有

$$\frac{dy}{dt} = f'(x) \cdot \frac{dx}{dt}$$

这说明变化率 $\frac{dy}{dt}$ 可以通过变化率 $\frac{dx}{dt}$ 得到．

对于所给问题，如图 27，以 DE 和 BC 分别表示人高和灯高，以 $DB = x$ 和 $AB = y$ 分别表示人和人影端点到灯的水平距离．

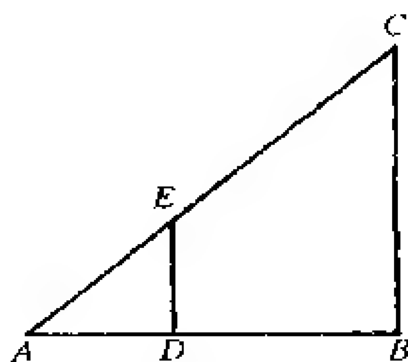


图 27 人与街灯示意图

由于 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$，有

$$\frac{y - x}{y} = \frac{1.8}{5} \quad 即 \quad y = \frac{25}{16}x$$

于是

$$\frac{dy}{dt} = \frac{25}{16} \cdot \frac{dx}{dt}$$

又依题 $\frac{dx}{dt}=1.6$ 故

$$\frac{dy}{dt}=\frac{25}{16}\times1.6=2.5(m/s)$$

即人影端点移动的速率为 2.5m/s.

思考题： 有一圆锥形容器，高度为 10m，底半径 4 米，今以每分钟 $5m^3$ 的速度把水注入该容器，求当水深 5 米时，水面上升的速度．其中，(1) 圆锥的顶点朝上；(2) 圆锥的顶点朝下(答案：均为 $\frac{5}{4\pi}$ m/min)．

参考文献： [58]，p. 109—112.

28、陨石的下落

地球的质量是 5.983×10^{24} 千克，今有一块质量为 10 000 千克的陨石正在朝着地球的方向运动．

(a) 当陨石与地球相距 100 公里时，求它们之间的引力(以牛顿为单位)；

(b) 如果陨石继续朝地球的方向运动，则在相距 100km 时，引力的递增速度是多少？

解： (a) 由牛顿的万有引力定律知，两个距离为 r(米)，质量分别为 m_1 与 m_2 的质点之间的引力，是沿它们的连线而作用的，其大小为

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$$

其中 $G=6.673\times10^{-11}N\cdot m^2/kg^2$ 为引力常数，从而当陨石距地球 r 米时，两者间的引力为

$$F=6.673\times10^{-11}\cdot\frac{(5.983\times10^{24})\cdot10^4}{r^2}$$

$$= 39.925 \times 10^{17} \times r^{-2}$$

特别地，当 $r = 100\text{km} = 10^5\text{m}$ 时，

$$F = 39.925 \times 10^7 (\text{N})$$

(b) 先求引力关于 r 的变化率：

$$\frac{dF}{dr} = \frac{d}{dr}(39.925 \times 10^{17} \times r^{-2})$$

$$= -79.85 \times 10^{17} r^{-3}$$

当 $r = 100\text{km} = 10^5\text{m}$ 时，

$$F'(10^5) = -79.85 \times 10^{17} \times (10^5)^{-3} = -7985(\text{N/m})$$

这里的负号表示随着 r 的递增，力 F 递减；或者相反，随着 r 的递减，力 F 递增. 从而在陨石距地球 100km 时，引力的递增速度为 7 985N/m.

参考文献： [1]，上册，p. 132～134.

29、国会议席的估计

在一次美国总统选举后，把当选总统所得公众选举票数的百分比记作 p，记

$$H(p) = \frac{p^3}{p^3 + (1-p)^3} \qquad (0 \leqslant p \leqslant 1)$$

这个函数有着有趣的性质（称为立方律）. $H(p)$的值可用来逼近当选总统所在党获得众议院议席的百分比，因此，称 $H(p)$为“议会函数”. 例如，在 1939 年，民主党候选人弗兰克林·罗斯福(F.D. Rosevelt)赢得了公众 61% 的选票，从而当选总统. 在那次选举中，议会函数 $H(0.61) = 0.79$，即估计民主党将占众议院议席的 79%. 在实际选举中，民主党赢得 333 个议席，共和党赢得 89 个席位，即民主党占 78.9%. 求 $H(p)$的一阶、二阶导数，分析凸凹性.

解： $H(p) = \dfrac{p^3}{3p^2 - 3p + 1}$，则

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}p}=\frac{(3p^2-3p+1)3p^2-p^3(6p-3)}{(3p^2-3p+1)^2}$$

$$=\frac{3p^2(p^2-2p+1)}{(3p^2-3p+1)^2}=\frac{3p^2(p-1)^2}{(3p^2-3p+1)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2H}{\mathrm{d}p^2}=\frac{6p(p-1)(2p-1)}{(3p^2-3p+1)^3}$$

从而当 $0<p<1$ 时，$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}p}>0$，即 H 为增函数．即在总统选举中得票越多，在众议院获得席位越多，实际也是如此．

当 $0<p<\frac{1}{2}$ 时，$\frac{\mathrm{d}^2H}{\mathrm{d}p^2}>0$，即在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上是上凹的．

而当 $\frac{1}{2}<p<1$ 时，$\frac{\mathrm{d}^2H}{\mathrm{d}p^2}<0$，即在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上是下凹的．

参考文献： [53]，p.170～173.

30、怎样设计海报的版面既美观又经济

现在要求设计一张单栏的竖向张贴的海报，它的印刷面积 128 平方分米，上下空白各 2 分米，两边空白各 1 分米，如何确定海报尺寸可使四周空白面积为最小？

解： 这个问题可用求一元函数最小值的一般方法解决．设印刷面积由从上到下长 x 分米和从左到右宽 y 分米构成，则 $xy=128$，从而 $y=\frac{128}{x}$．于是，四周空白面积为

$$s=2x+4y+4\cdot 2=2x+\frac{4\cdot 128}{x}+8,0<x<+\infty$$

两边同时对 x 求导，得

$$s'=2-\frac{512}{x^2}$$

由 $s'=0$ 得，$x=16$，此时 $y=8$，又因为

$$s'' = \frac{1\,024}{x^3} > 0, 0 < x < +\infty$$

所以,当海报印刷部分为从上到下长16分米,从左到右宽8分米时,可使四周空白面积为最小.

思考题: 若海报改为左右两栏,横向张贴,印刷面积增加到180平方分米,要求四周留下空白宽2分米,还要留1分米宽的竖直中缝,如何设计它的尺寸可使总空白面积最小?能否用其它方法求解?(答案:印刷部分从左到右 2×7.5 分米,从上到下12分米.还可用求多元函数条件极值的拉格朗日乘数法求解).

参考文献: [58],p.123~130.

31、接受能力与讲授时间的关系

通过研究一组学生的学习行为,心理学家发现接受能力(即学生掌握一个概念的能力)依赖于在概念引入之前老师提出和描述问题所用的时间.讲座开始时,学生的兴趣激增,但随着时间的延长,学生的注意力开始分散.分析结果表明,学生掌握概念的能力由下式给出:

$$G(x) = -0.1x^2 + 2.6x + 43$$

其中 $G(x)$ 是接受能力的一种度量,x 是提出概念所用的时间(单位:min).

(*a*) x 为何值时,学生接受能力增强或降低?

(*b*) 第10分钟时,学生的兴趣是增长还是注意力下降?

(*c*) 最难的概念应该在何时讲授?

(*d*) 一个概念需要55的接受能力,它适于对这组学生讲授吗?

解: (*a*) $G'(x) = -0.2x + 2.6$ 令 $G'(x) = 0$,则 $x = 13$.当 $x < 13$ 时,$G'(x) > 0$,$G(x)$ 单调上升;当 $x > 13$ 时,$G'(x) < 0$,G

(x)单调下降.

所以当提出概念所用的时间小于13分钟时,接受能力增强;当提出概念所用的时间大于13分钟时,接受能力降低(见图31).

(b) $x=10\in[0,13]$, $G(x)$单调上升,学生的兴趣在增长.

(c) $G(x)$在$x=13$时取极大值,所以最难的概念应该在提出问题后的第13分钟时讲授.

(d) 因为$G(13)=59.9$,这个概念需要55的接受能力,小于最大接受能力,所以可以对这组学生讲授该概念.

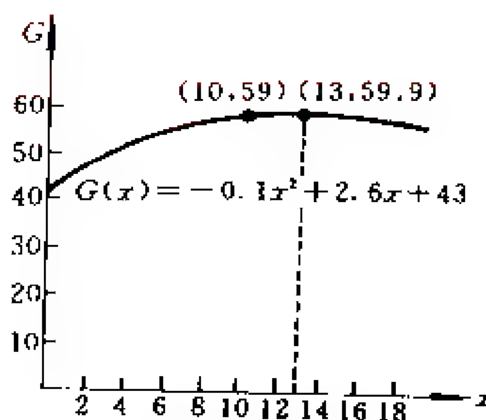


图31 接受能力函数$G(x)$

参考文献: [45],p.76~77.

32、绝热过程中的压力变化速度

在化学中,所谓一个绝热过程,是指既不能得到热量也不损失热量的过程.根据实验表明,在一个绝热过程中,某些气体(如氢或氧)在一个容器中的压力P和体积V满足公式

$$PV^{1.4}=\text{常数}$$

已知某一时刻一个封闭容器中的氢的体积是4m^3,压力是0.75kg/m^2,如果体积以$0.5\text{m}^3/\text{s}$的速度增加,求此时压力的递减速度.

解: 对$PV^{1.4}=$常数.两端对t求导得

$$P\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V^{1.4})+\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\cdot V^{1.4}=0$$

即

$$P\times1.4\times V^{0.4}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\times V^{1.4}=0$$

故
$$\frac{dP}{dt}=\frac{-1.4PV^{0.4}}{V^{1.4}}\frac{dV}{dt}=-1.4\frac{P}{V}\frac{dV}{dt}$$

将问题中的已知数据代入，得到

$$\frac{dP}{dt}=-1.4\times\frac{0.75}{4}\times0.5=-0.13125(\mathrm{kg/m^2/s})$$

所以此时压力的递减速度是 $0.13125\mathrm{kg/m^2/s}$

参考文献： [1]，上册，p.169～170.

33、垒球比赛时人眼的转动速度

在垒球比赛中，假设你正在击球手的位置上，当投球手将球投出时，你总想要盯住飞行的球，这样，击球的准确性才更大. 为此，你的眼睛就要随着球的飞行而转动.

现设球速为 40m/s，而且为方便起见，假设球在你眼睛的水平面上飞行，本垒离你 0.6m，试问：当球穿过本垒时，若要你的眼睛仍能盯住飞行的球，那么眼睛的转动速度应为多少？

解： 角 θ 如图 33 所示，y 为球距本垒的距离.

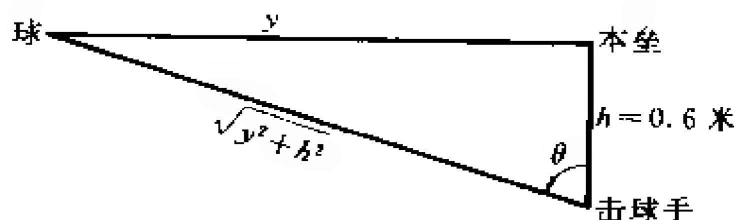


图 33 垒球的飞行

则变量 y 和 θ 都随时间变化而变化，且满足下列关系式：

$$\cos\theta=\frac{h}{\sqrt{y^2+h^2}}$$

对上式两边求导得

$$-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{-hy}{(y^2+h^2)^{3/2}}\cdot\frac{dy}{dt}$$

但 $\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{y^2+h^2}}$ 代入得

$$\frac{-y}{\sqrt{y^2+h^2}}\frac{d\theta}{dt}=\frac{-hy}{(y^2+h^2)^{3/2}}\frac{dy}{dt}$$

则可得到

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{h}{y^2+h^2}\frac{dy}{dt}$$

$\frac{d\theta}{dt}$ 称为角速度，即当球距本垒 y 米时，球以速度 $\frac{dy}{dt}$ 飞行，而你以速度 $\frac{d\theta}{dt}$ 转动你的眼睛．当球穿过本垒时，

$$\frac{dy}{dt}=-40\text{m/s},h=0.6\text{m},y=0\text{m}$$

则 $\frac{d\theta}{dt}=\frac{0.6}{0^2+0.6^2}(-40)\approx-67\text{rad/s}\approx$ 每秒 $-3\ 839$ 度

其中，负号表示转动的方向为使 θ 减小的方向．

下面来简单分析一下以上结论．假定一般人的眼睛 $\frac{1}{5}$ 秒能转动 180°，即转动速度为每秒 900 度，这一速度只是以上结果的 $\frac{1}{4}$，因而一般人很难在比赛中真正盯住飞行的球．有趣的是，当取 $h=2.5\text{m}$ 时，$\frac{d\theta}{dt}$ 约为每秒 917 度，此时，你能够盯住飞行的球，但你离本垒太远，已无法击球．

参考文献： [53]，p.608～610．

34、如何调整工人的人数而保证产量不变

一工厂有 x 名技术工人和 y 名非技术工人，每天可生产的产

品产量为

$$f(x,y)=x^2y \qquad (件)$$

现有16名技术工人和32名非技术工人,而厂长计划再雇用1名技术工人.试求厂长如何调整非技术工人的人数,可保持产品产量不变?

解: 现在产品产量为 $f(16,32)=8\ 192$ 件,保持这种产量的函数曲线为

$$f(x,y)=8\ 192$$

对于任一给定值 x,每增加一名技术工人时 y 的变化量即为这函数曲线切线的斜率 $\frac{dy}{dx}$.

而由隐函数存在定理,可得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

所以,非技术工人的变化量为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{2y}{x}$$

当 $x=16,y=32$ 时,可得

$$\frac{dy}{dx}=-4$$

因此,厂长要增加一个技术工人并要使产量不变,就要相应地减少约4名非技术工人.

当然,此题亦可用初等数学方法求解,例如下面给出的一个初等数学解法.令

c:每天可生产的产品产量;

$x_0=16$:技术工人数;

$y_0=32$:非技术工人数;

$\Delta x=1$：技术工人增加人数；

Δy：在保持每天产品产量不变情况下，当技术工人由 16 名增加到 17 名时，非技术人员要增加（或减少）的人数.

由已知列方程：

①当技术工人为 16 名，非技术工人为 32 名时，每天的产品产量为 c，则有方程：

$$x_0^2 \cdot y_0 = c \tag{1}$$

②当技术工人增加了 1 名时，非技术工人应为 $(y_0+\Delta y)$ 名，且每天的产品产量为 c，则有方程：

$$(x_0+\Delta x)^2 \cdot (y_0+\Delta y) = c \tag{2}$$

联立方程组(1)、(2)，消去 c 得：

$$x_0^2 \cdot y_0 = (x_0+\Delta x)^2 \cdot (y_0+\Delta y)$$

即
$$\begin{aligned}\Delta y &= [x_0^2/(x_0+\Delta x)^2] \cdot y_0 - y_0 \\ &= -y_0\left[1-\frac{x_0^2}{(x_0+\Delta x)^2}\right] \\ &= -y_0\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^2}\right]\end{aligned}$$

代入 x_0、y_0、Δx，得：

$\Delta y \approx -3.6 \approx -4$(名)，即减少 4 名非技术工人.

比较这两种解法我们可以发现，用初等数学方法计算此题的工作量很大. 究其原因，我们注意到下面之展开式：

$$1-\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^2} = 2\frac{\Delta x}{x_0} - 3\left(\frac{\Delta x}{x_0}\right)^2 + \sum_{n=4}^{\infty}(-1)^{n-1} n \left(\frac{\Delta x}{x_0}\right)^{n-1}$$

从这展开式我们可以看到，初等数学方法不能忽略掉高阶无穷小：

$$-3\left(\frac{\Delta x}{x_0}\right)^2 + \sum_{n=4}^{\infty}(-1)^{n-1} n \left(\frac{\Delta x}{x_0}\right)^{n-1} \quad (\Delta x \to 0) \tag{3}$$

而高等数学方法却利用了隐函数求导，忽略掉高阶无穷小(3)，所

以计算较容易.

参考文献： [51],p.371～372.

35、谁是竞选中的获胜者

我们分析竞选中两位竞选者的表现.图35中的曲线 $A(t)$、$B(t)$分别表示竞选开始 t 周后选民对竞选者 A、B 的支持率.在第五周,竞选者 A 的支持率以每周5%的速率增长,竞选者 B 的支持率以每周3%的速率增长.此时,A、B 的支持率相同,均为35%.因此我们说,此时竞选者 A 比 B 处于有利的地位.但随着支持 B 的选民的增长率在增大时,支持 A 的选民的增长率却在减小.我们说竞选者 B 有"雪球"效应,而 A 却没有.事实上,在选举开始后的第十周,竞选者 B 有55%的支持率,而 A 的支持率仅为45%.

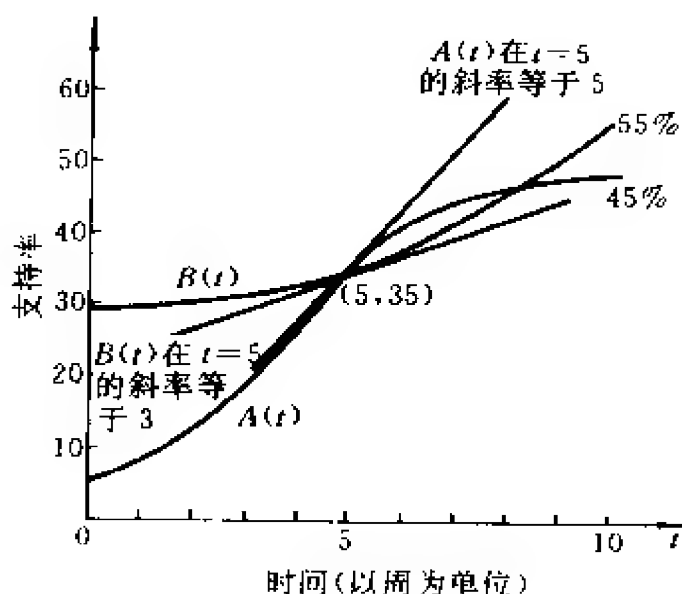


图35 选民对竞选者 A、B 的支持率

函数 $A(t)$、$B(t)$的区别在于切线斜率的变化率是不同的．切线的斜率是导数，斜率的变化率则是“导数的导数”，即二阶导数．

试应用“雪球”效应理论解决下面的实例．

一个新手参加州议员的初选．竞选班子认为只有有“雪球”效应时，该竞选者才能获胜．在竞选的第 x 周时，民意测验结果显示支持该竞选者的人数（单位：百万）由下式给出：

$$S(x)=3x+2\sqrt{x}+4.5$$

试问：该竞选者的前景如何？

解： 支持该竞选者的人数的变化率为：

$$S'(x)=3+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

∵ $x>0$， ∴ $S'(x)>0$，即支持者的人数在增加．

但是，人数增加的变化率由下式给出：

$$S''(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

∵ $x>0$， ∴ $S''(x)<0$，即支持该竞选者的人数的增长率在减小．因此，该竞选者没有“雪球”效应，前景不容乐观，除非采取新的竞选策略．

参考文献： [45]，p.113～114.

36、工人上班何时效率最高

对某工厂的上午班工人的工作效率的研究表明，一个中等水平的工人早上8:00开始工作，在 t 小时之后，生产出

$$Q(t)=-t^3+9t^2+12t$$

个晶体管收音机．问：在早上几点钟这个工人工作效率最高？

解： 求这个工人几点钟工作效率最高，就是问早上几点钟这个工人的生产率取到最大值．我们知道，一般地，对于函数 $y=$

$f(x)$,若自变量 x 在 x_0 点有一个增量 Δx,必然引起因变量 y 的一个增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$,则比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 就是当 x 变动一数量 Δx 时,y 关于 x 的平均变化率,在此题中就是一个中等水平的工人的产量 Q 关于 t 的平均生产率.当 Δx 趋向于 0 时,这个比值的极限就称为 y 在所给 x 值时的变化率,在此题中就是一个中等水平的工人的产量 Q 关于 t 的变化率,即在 t 时刻的生产率.也就是说这个工人的生产率就是导函数

$$R(t) = Q'(t) = -3t^2 + 18t + 12$$

假定上午班是从早上 8:00 至中午 12:00,则问题转化为求函数 $R(t)$ 在区间 $0 \leqslant t \leqslant 4$ 上的最大值.$R(t)$ 的导函数是

$$R'(t) = Q''(t) = -6t + 18$$

当 $t = 3$ 时,上式等于 0.比较

$$R(0)=12, R(3)=39, R(4)=36$$

由求函数最大值的方法知,当 $t=3$ 时,即在上午 11:00,这个工人的工作效率最高.

参考文献: [51],p. 135~136.

37、怎样在越野赛中取胜

越野赛在湖滨举行,场地情况如图 37－1 所示:出发点在陆地 A 处,终点在湖心岛 B 处,A、B 南北相距 5km,东西相距 7km,湖岸位于 A 点南侧 2km,是一条东西走向的笔直长堤.比赛中运动员可自行选择路线,但必须先从 A 出发跑步到达长堤,再从长堤处下水游泳到达终点 B.已知运动员甲跑步速度为 $v_1 = 18$km/h,游泳速度为 $v_2 = 6$km/h.问他应该在长堤的何处下水才能使比赛用时最少?

解: 以长堤作为 x 轴建立直角坐标系,A、B 的坐标分别是

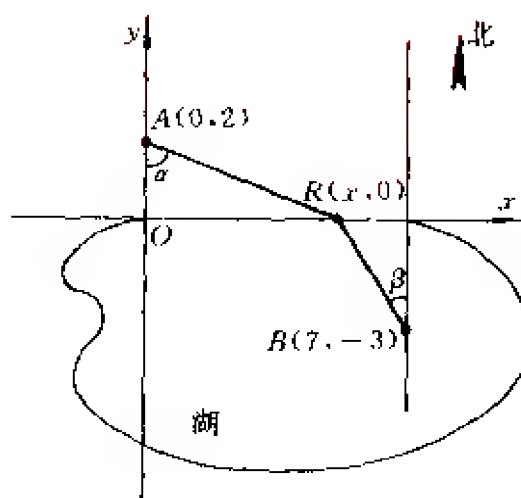


图 37 · 1　越野赛场地

$A(0,2)$，$B(7,-3)$. 设甲在 x 轴上 $R(x,0)$ 处下水. 为使耗时最少，运动员在陆上和水中的运动路线应该都取直线. 跑步耗时 $t_1 = \frac{|AR|}{v_1} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{18}$，游泳耗时 $t_2 = \frac{|RB|}{v_2} = \frac{\sqrt{(7-x)^2+9}}{6}$，全程总耗时

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{18} + \frac{\sqrt{(x-7)^2+9}}{6} \tag{1}$$

求 x，使 $T(x)$ 达到极小.

$$\frac{dT}{dx} = \frac{x}{18\sqrt{x^2+4}} - \frac{7-x}{6\sqrt{(7-x)^2+9}} \tag{2}$$

令 $T(x)=0$，　得

$$\frac{x}{18\sqrt{x^2+4}} = \frac{7-x}{6\sqrt{(7-x)^2+9}} \quad 0\leqslant x\leqslant 7 \tag{3}$$

利用(3)可解出驻点 $x=6$.

计算可知，$T(6) = \frac{\sqrt{36+4}}{18} + \frac{\sqrt{(7-6)^2+9}}{6} = \frac{5}{18}\sqrt{10} \approx 0.8784(\text{h})$

类似可得
$$T(0)\approx 1.3804(\text{h})$$
$$T(7)\approx 0.9045(\text{h})$$

比较端点与驻点处的值，可知 $x=6$ 时 $T(x)$ 达到最小值．因此，甲应该在 $x=6$ 处下水，才能使比赛全程用时最少．

值得一提的是(3)可以表示为

$$\frac{\sin\alpha}{v_1}=\frac{\sin\beta}{v_2} \quad 或 \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2} \tag{4}$$

其中 α 是线段 AR 与 y 轴夹角，β 是线段 RB 与 y 轴的夹角 $(0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2})$．这与光线的折射定律极为相似．

思考题 1. 一束光线由空气中 A 点经过水面折射后到达水中 B 点．已知光线总是沿着耗时最少的路线传播．在如图 37－2 所示坐标系中，A、B 坐标为 $A(0,p)$，$B(d,q)$，x 轴为水面．设光在空气中的速度是 c_a，光在水中传播的速度是 c_w，试确定光线传播的路线，并找出入射角 α 与折射角 β 之间的关系．

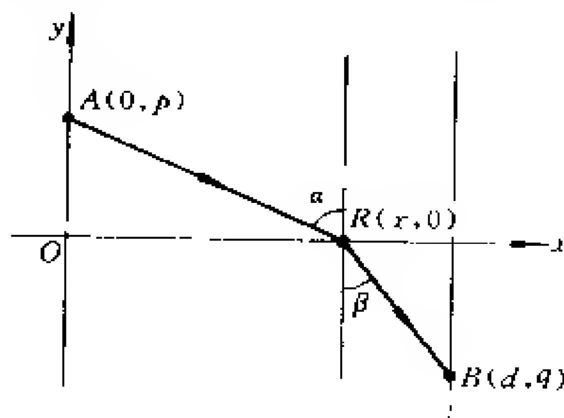


图 37－2　光线的折射

提示： 光线在同一介质内必沿直线传播才能耗时最少．设折射点为 $R(x,0)$，则总传播时间为

$$T(x)=\frac{\sqrt{p^2+x^2}}{c_a}+\frac{\sqrt{q^2+(d-x)^2}}{c_w}$$

为使 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=0$，$x$ 必满足方程

$$\frac{x}{c_a\sqrt{p^2+x^2}}=\frac{d-x}{c_w\sqrt{q^2+(d-x)^2}}$$

此即

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{c_a}{c_w}$$

这就是光线的折射定律：

光线从一种介质射入另一种介质时会发生折射现象.若光在介质 1 中的速度为 c_1，在介质 2 中的速度为 c_2，则入射角 θ_1 与折射角 θ_2 必满足：

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{c_1}{c_2}\qquad(0<\theta_1,\theta_2<\pi/2)$$

思考题 2. 用类似的方法也可以获得光线的反射定律.一束光线由 A 点出发经过镜面 π 的反射后到达另一点 B.在如图 37－3 所示的坐标系中，A、B 坐标分别为 $A(0,p)$，$B(d,q)$，镜面 π 为 x 轴.已知光线沿耗时最少的路线传播，试确定光的传播路线，并讨论入射角与反射角的关系.

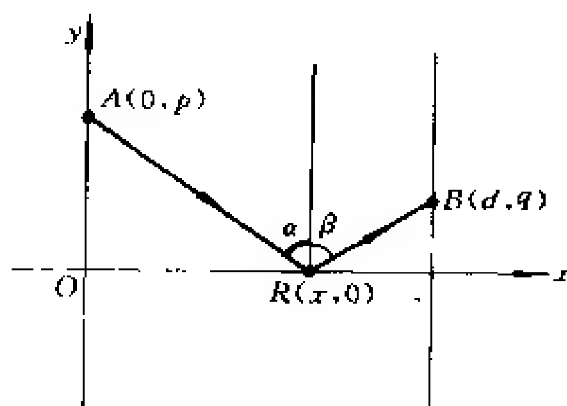


图 37－3 光线的反射

提示： 光线在折射点之前、之后必沿直线传播才能使总耗时最少.设折射点为 $R(x,0)$，则总传播时间为

$$T(x)=\frac{1}{c}\left(\sqrt{p^2+x^2}+\sqrt{q^2+(d-x)^2}\right)$$

其中 c 为光速.

由极值必要条件可知

$$\frac{x}{\sqrt{p^2+x^2}}=\frac{d-x}{\sqrt{q^2+(d-x)^2}}\quad(0\leqslant x\leqslant d)$$

此即 $\sin\alpha=\sin\beta$. 于是,我们得到光线的反射定律:光线在发生反射时,入射角恒等于反射角.

参考文献: [55],p. 154;[68],p. 109.

38、磁盘的最大存储量

微型计算机把数据存储在磁盘上.磁盘是带有磁性介质的圆盘,并由操作系统将其格式化成磁道和扇区.磁道是指不同半径所构成的同心圆轨道,扇区是指被圆心角分隔所成的扇形区域.磁道上的定长弧段可作为基本存储单元,根据其磁化与否可分别记录数据 0 或 1,这个基本单元通常被称为比特(bit).磁盘的构造如图 38 所示.

为了保障磁盘的分辨率,磁道宽度必须大于 ρ_t,每比特所占用的磁道长度不得小于 ρ_b.为了数据检索的便利,磁盘格式化时要求所有磁道要具有相同的比特数.

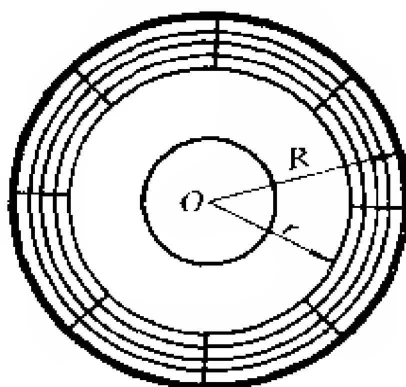


图 38 磁盘的构造

现有一张半径为 R 的磁盘,它的存储区是半径介于 r 与 R 之间的环形区域,试确定 r,使磁盘具有最大储存储量.

解: 存储量 = 磁道数 × 每磁道的比特数

设存储区的半径介于 r 与 R 之间,故磁道数最多可达 $\frac{R-r}{\rho_t}$.

由于每条磁道上的比特数相同，为获得最大存储量，最内一条磁道必须装满，即每条磁道上的比特数可达到$\frac{2\pi r}{\rho_b}$. 所以，磁盘总存储量

$$B(r)=\frac{R-r}{\rho_t}\cdot\frac{2\pi r}{\rho_b}=\frac{2\pi}{\rho_t\rho_b}r(R-r)$$

为求 $B(r)$的极值，计算

$$B'(r)=\frac{2\pi}{\rho_t\rho_b}(R-2r)$$

$$B''(r)=\frac{2\pi}{\rho_t\rho_b}(-2)$$

令 $B'(r)=0$， 解出驻点 $r=\frac{R}{2}$.

由于 $B''(r)<0$，在 $r=\frac{R}{2}$处 $B(r)$取得极大值.

故当 $r=\frac{R}{2}$时，磁盘具有最大存储量. 此时最大存储量 $B_{max}=\frac{2\pi}{\rho_t\rho_b}\frac{R^2}{4}$.

思考题：一张直径 5.25 英寸的双面高密软盘，其有效存储半径 $R=2.25$ 英寸，磁道宽度 $\rho_t=0.0061$ 英寸，每比特长度 $\rho_b=0.0011$英寸. 试计算此磁盘的最大容量，并与实际情况相比较. 提示：$B_{max}=2\cdot\frac{2\pi}{\rho_t\rho_b}\cdot\frac{R^2}{4}=\frac{\pi R^2}{\rho_b\rho_t}$，将实际数据代入计算知 $B_{max}\doteq 2370240(\text{bit})\doteq 2315\text{kb}(1\text{kb}=1024\text{bit})$，即此磁盘最大存储量约为2315kb.

实际格式化时，磁盘每面分成 80 条磁道，15 个扇区，每个扇区有 512 比特，故磁盘的实际存储量为

$$B=80\times15\times512\times2=1228800\text{bit}=1200\text{kb}=1.2\text{M}$$

实际格式化时，$R=2.25$，$r=1.34$.

$$r\approx0.6R>0.5R$$

故它还可以存储更多的信息.

参考文献： [55],p.176.

39、征税的学问

工厂想赚钱,政府要收税,一个怎样的税率才能使双方都受益？这个问题很现实,下面我们就来讨论它.

假设工厂以追求最大利润为目标面控制它的产量 q,政府对其产品征税的税率(单位产品的税收金额)为 t,我们的任务是,确定一个适当的税率,使征税收益达到最大.

现已知工厂的总收益函数和总成本函数分别为 $R=R(q)$、$C=C(q)$.由于每单位产品要纳税 t,故平均成本要增加 t,从而纳税后的总成本函数是

$$C_t=C(q)+tq$$

利润函数是

$$L_t=R(q)-C_t(q)=R(q)-C(q)-tq$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}L_t}{\mathrm{d}q}=0$, 有

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}q}=\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}q}+t \tag{1}$$

这就是在纳税的情况下获得最大利润的必要条件.

政府征税得到的总收益是

$$T=tq \tag{2}$$

显然,总收益 T 不仅与产量 q 有关,而且与税率 t 有关.当税率 $t=0$(免税)时,$T=0$;随着单位产品税率的增加,产品的价格也提高,需求量就会降低,当税率 t 增大到使产品失去市场时,这时 $q=0$,从面也有 $T=0$.因此,为了使征税收益最大,就必须恰当地选取 t.我们利用一元函数极值的有关知识来解决本问题.下面看

一个实例.

例 1: 厂商的总收益函数和总成本函数分别为 $R=30q-3q^2$, $C=q^2+2q+2$. 厂商追求最大利润,政府对产品征税,求

1) 征税收益的最大值及此时的税率 t;

2) 厂商纳税前后的最大利润及价格.

解: 1) 由纳税后获得最大利润的必要条件(1),得

$$30-6q=2q+2+t$$

故
$$q_t=\frac{1}{8}(28-t)$$

根据实际问题的判断,q_t 就是纳税后厂商获得最大利润的产出水平. 于是,这时的征税收益函数

$$T=tq_t=\frac{1}{8}(28t-t^2)$$

要使税收 T 取最大值,令 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=0$,得

$$\frac{1}{8}(28-2t)=0,\text{即 } t=14$$

根据实际问题可以断定必有最大值,现在,$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=0$ 只有一根,所以当 $t=14$ 时,T 的值最大. 这时的产出水平 $q_t=\frac{1}{8}(28-14)=1.75$,最大征税收益为

$$T=tq_t=14\times1.75=24.5$$

2) 容易算得纳税前,当产出水平 $q=3.5$ 时,可获得最大利润 $L=47$,此时价格 $p=19.5$;将 $q_t=1.75$, $t=14$ 代入纳税后的利润函数

$$L_t=R(q)-C_t(q)=-4q^2+(28-t)q-2$$

中,得最大利润 $L=10.25$. 此时产品价格

$$p=\frac{R(q)}{q}\bigg|_{q=1.75}=(30-3q)\bigg|_{q=1.75}$$

$=24.75$

可见,因产品纳税,产出水平由 3.5 下降到 1.75;价格由 19.5 上升到 24.75;最大利润由 47 下降到 10.25.

参考文献: [8],p.330~332.

40、以多大利率贷出贷款可获最大利润

1. 某不动产商行能以 5% 的年利率借得贷款,然后它又把此款贷给顾客.若它能贷出的款额与它贷出的利率的平方成反比(利率太高无人借贷).问以多大的年利率贷出能使商行获利润最大?

解: 设贷出的年利率为 x,于是贷出的款额为$\frac{k}{x^2}$,$k>0$ 为常数,商行可以获利

$$P=(x-0.05)\cdot\frac{k}{x^2}=\frac{k}{x}-\frac{0.05k}{x^2}$$

由

$$P'(x)=0 \quad 得 \quad -\frac{k}{x^2}+\frac{0.10k}{x^3}=0$$

所以
$$x=0.10$$

$$P''(0.1)=k(2000-3000)<0$$

故 $x=0.1$ 是个极大值点,且 $P(x)$仅有一个极值点

$\therefore$ $x=0.1$ 时获利最大.

实际上 $x=0.08$ 时 $P=4.6875k$

$x=0.10$ 时 $P=5k$

$x=0.15$ 时 $P=4.44k$

2. 一个银行的统计资料表明,存放在银行中的总存款量正比于银行付给存户利率的平方.现在假设银行可以用 12% 的利率再投资这笔钱.试问为得到最大利润,银行所支付给存户的利率应定

为多少?

解: 假设银行支付给存户的年利率是 r,$(0<r\leqslant 1)$,这样银行总存款量为 $A=kr^2$($k>0$,为比例常数).

把这笔钱以12%的年利率贷出一年后可得款额为$(1+0.12)A$,而银行支付给存户的款额为$(1+r)A$,银行获利

$$P=(1+0.12)A-(1+r)A=(0.12-r)A$$
$$=(0.12-r)kr^2$$

$$\frac{dP}{dr}=k(0.24r-3r^2)=0.$$

$r=0$(舍去)$r=0.08$.当 $r<0.08$ 时 $P'>0$,当 $r>0.08$ 时 $P'<0$ 且 $r=0.08$ 是$(0,1]$中唯一的极值点.故取8%的年利率付给存户,银行可获得最大利润.

显然,银行不能把客户的所有存款都贷出去,所以本题是极端情形,试考虑,当银行以20%的年利率把总存款的90%贷出去,银行支付给存户的年利率定为多少合适?银行贷出的利率定为12%行吗?

(5.3%;不行,利率太低,无人存款)

参考文献: [3],上册,p.240;[25],上册,p.349.

41、收入分布问题(劳伦兹曲线)

表41是1955年美国国民总收入的分布情况,其中的次序是从低收入到高收入.图41是经过该表中各点的一条平滑曲线,称它为劳伦兹曲线,用 $r=f(p)$表示.其中 p 表示人口比例,r 为相应的收入比例.显然,$f(0)=0,f(1)=1$.

考虑点 $A(0.2,0.05)$与点 $B(0.4,0.16)$之间的那段曲线,我们看到在0.2与0.4之间(占人口总数的20%)那部分人的总收入仅占全部收入的$0.11=0.16-0.05=11\%$,即他们的收入低于

平均收入(理想情况应当是20%的人应该享有全部收入的20%),此时,$\frac{0.11}{0.20}=0.55$ 就可看作公平程度的一种度量,它等于连接点 A 与点 B 的割线的斜率.位于0.6到0.8之间(也占20%)的那部分人的情况稍好一些,他们得到全部收入的 $0.22=0.55-0.33=22\%$,此时公平程度为$\frac{0.22}{0.20}=1.1$.上述公平程度可以分别看作区间[0.2,0.4]、[0.6,0.8]上的平均公平程度,若令人口的百分比 $\Delta p\to 0$,则$\frac{dr}{dp}$就是在 p 点的"瞬时"公平度.

表41　总收入分布情况

人口比例	收入比例
0.0	0.0
0.2	0.05
0.4	0.16
0.6	0.33
0.8	0.55
1.0	1.00

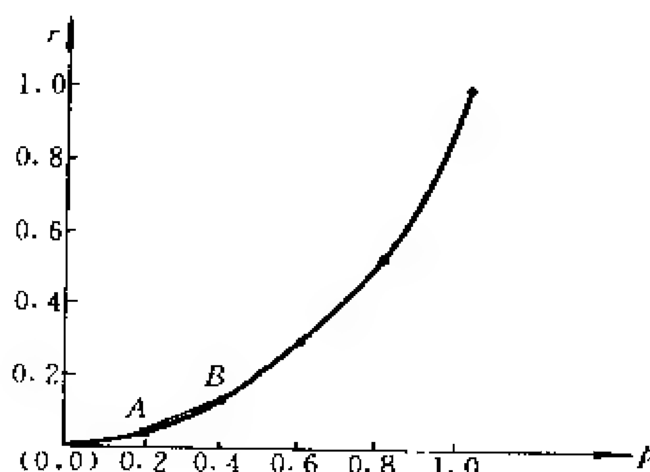


图41　劳伦兹曲线

如果在劳伦兹曲线上有一点处的切线的斜率为1,则此点的 p 值称为均匀分配系数(简称为ESC),我们用 ε 表示它.比如,若 $\varepsilon=0.55$,那就意味着55%的人收入低于平均收入,45%的人的收入高于平均收入.

我们可以认为劳伦兹曲线 $r=f(p)$ 是可导的,且它的切线的斜率是递增的.这就是说,从左到右,相同比例的人口的收入是递增的.如果 $r=f(p)=p$,则曲线的斜率处处为1,即所有人的收入都是一样的;如果 $r=f(p)\neq p$,则由上述可知,$f'(p)$ 是 p 的

一个严格增函数.此时若有 ε 使 $f'(\varepsilon)=1$,则这种 ε 只有一个.另一方面,由拉格朗日中值定理($r=f(p)$显然满足拉格朗日中值定理的条件)知存在一点 $c\in(0,1)$,使得

$$1=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$$

成立.故 c 就是要找的 ε.这样,我们就证明了任何一条劳伦兹曲线都有均匀分配系数,并且由此立刻可以知道收入低(高)于平均收入的人口比例.

例 1: 设 $r=p^{\frac{3}{2}}$,则 $\frac{dr}{dp}=\frac{3}{2}p^{\frac{1}{2}}$,当 $p^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$ 即 $p=\frac{4}{9}\approx 0.44$ 时,$\frac{dr}{dp}=1$,所以 $\varepsilon=0.44$.这说明有 44%的人口的收入低于平均收入.

参考文献: [1],p.175—177.

42、如何定价使利润最大

1. 房租应该定为多少?

一房地产公司有 50 套公寓要出租.当租金定为每月 180 元时,公寓会全部租出去.当租金每月增加 10 元时,就有一套公寓租不出去,而租出去的房子每月需花费 20 元的整修维护费.试问房租定为多少可获得最大收入?

解: 设租金为 x 元/月,租出的公寓有 $50-\left(\frac{x-180}{10}\right)$套,总收入为

$$\begin{aligned}R&=(x-20)\left(50-\frac{x-180}{10}\right)\\&=(x-20)\left(68-\frac{x}{10}\right)\end{aligned}$$

$$R'(x)=\left(68-\frac{x}{10}\right)+(x-20)\left(-\frac{1}{10}\right)$$
$$=70-\frac{x}{5}=0$$

∴ $x=350$ 元/月.

当 $x\in(0,350)$时,$R'>0$;当 $x\in(350,+\infty)$时,$R'<0$. ∴$x=350$ 是极大值点,且 $R(x)$只有一个极值点,所以是最大值点. 这时总收入为 10890 元.

2. 商品价格定为多少可获得最大利润?

设某商品其成本每件 c 元,当每件售价是 x 元时可售出 $n=\frac{a}{x-c}+b(100-x)$件,其中 a、b 均为正的常数. 问售价 x 定为多少时可获得最大利润?

解: 因为每售出一件商品可获利 $x-c$ 元,于是售出 n 件可获利

$$P(x)=(x-c)\cdot n=a+(100-x)(x-c)b,\quad 0<x<+\infty$$

求 $P(x)$的最大值.

$$P'(x)=(100+c-2x)b=0$$

∴ $x=50+\frac{c}{2}$. 又 $P''(x)=-2b<0$,所以 $x=50+\frac{c}{2}$是个极大值点,$P(x)$只有一个极值点,所以它是最大值点,故 $x=50+\frac{c}{2}$时可获得最大利润 $P=a+\left(50-\frac{c}{2}\right)^2 b$.

当$\frac{c}{2}$不是整数时,取其整数部分$\left[\frac{c}{2}\right]$即可.

参考文献: [25],上册,p.349.

43、确定衬衫的售价使得获取利润最高

设某商店以每件 10 元的进价购进一批衬衫，并设此种商品的需求函数 $Q=80-2P$（其中，Q 为需求量，单位为件，P 为销售价格，单位为元）. 问该商店应将售价定为多少元卖出，才能获得最大利润？最大利润是多少？

解：设总利润函数为 L，总收益函数为 R，总成本为 C. 所以有如下关系：

$$L=L(P)=R(P)-C(P) \tag{1}$$

由于总收益等于需求量乘以销售价格，所以有

$$R(P)=Q(P)\cdot P=(80-2P)P=80P-2P^2 \tag{2}$$

由于总成本等于需求量乘以购进价格，所以有

$$C(P)=Q(P)\cdot 10=10(80-2P)=800-20P \tag{3}$$

将(2)、(3)式代入(1)式，得

$$L(P)=80P-2P^2-800+20P$$
$$=100P-2P^2-800 \quad (P>0) \tag{4}$$

(4)式就是总利润与销售价格之间的函数关系.

为了求利润的最大值，对(4)式求导，得

$$L'(P)=100-4P$$

令 $L'(P)=0$，得 $P=25$，又 $L''(P)=-4<0$，所以 $P=25$ 时 L 最大. 此时 $L(25)=100\times25-2\times(25)^2-800=450$ 元. 即将每件衬衫的销售价格定为 25 元时，总利润最大，此时总利润为 450 元.

44、电池的最佳组合

有 n 个电动势为 E 的电池，每个的内阻为 r，将它们以下述方式与已知的外电阻 R 连接：分成 s 个并联分支，m 是每个分支中串联的数目（图 44）. 问 m、s 的个数分别为多少时才能使 R 中

的有效电功率最大?

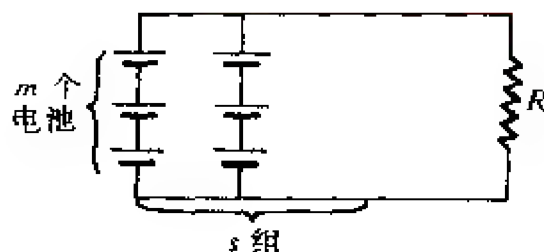


图 44 电池组合示意图

解： 显然，总的电动势等于每个单一分支的电动势，即 mE. 每个分支的电阻是 mr，总的内阻是$\frac{mr}{s}$.

为了使 R 中的电功率最大，电流 I 必须最大(因为电功率 $P=RI^2$). 由基尔霍夫定律，

$$I=\frac{mE}{(mr/s)+R}=\frac{smE}{mr+Rs}$$

然而 $ms=n$，由此得

$$I=\frac{nE}{mr+(Rn/m)}$$

其中 m 是唯一的变量.

当分母最小时，电流 I 最大. 我们把这个分母记作 y，令它的导数为 0，即

$$y=mr+\frac{Rn}{m}$$

$$y'=r-\frac{Rn}{m^2}=0$$

由此得

$$m=\sqrt{\frac{Rn}{r}}$$

及

$$s=\frac{n}{m}=\sqrt{\frac{rn}{R}}$$

因为当 $m<\sqrt{\frac{Rn}{r}}$ 时 $y'<0$，$m>\sqrt{\frac{Rn}{r}}$ 时 $y'>0$，所以 $m=\sqrt{\frac{Rn}{r}}$ 是极小值点.

显然，m 和 s 必须是正整数，但由它们的表达式知这种可能性很小.在满足 $ms\leqslant n$ 的条件下，我们取与计算的值最接近的整数.

注意，若将求得的 m、s 的值代入总内阻 $\frac{mr}{s}$，可得

$$\frac{mr}{s}=\frac{\sqrt{\frac{Rn}{r}}\cdot r}{\sqrt{\frac{rn}{R}}}=R$$

即，为使电功率最大，电池的总电阻应等于外电阻.

这个结论带有普遍性，它适用于直流、交流、低频及高频等情况.例如，在扩音器中，给一个高音喇叭供电的输出级，对于前者是一个功率为 BF 的振荡器，我们将发现同样的条件.

参考文献： [4]，p.107—108.

45、水管能搬进水塔吗

在地面上建有一座圆柱形水塔，水塔内部的直径为 d，并且在地面处开了一个高为 H 的小门.现在要对水塔进行维修施工，施工方案要求把一根长度为 $l(l>d)$ 的水管运到水塔内部.请问水塔的门高 H 多高时，才有可能成功地把水管搬进水塔内？

解： 如图 45 所示建立直角坐标系.水管运进水塔时，一端在地面上水平滑动，另一端在水塔壁上垂直滑动.设水管运动过程中，在入门处的高度为 h，水管与地面的夹角为 $\theta(0<\theta<\pi/2)$.根据题意可知：

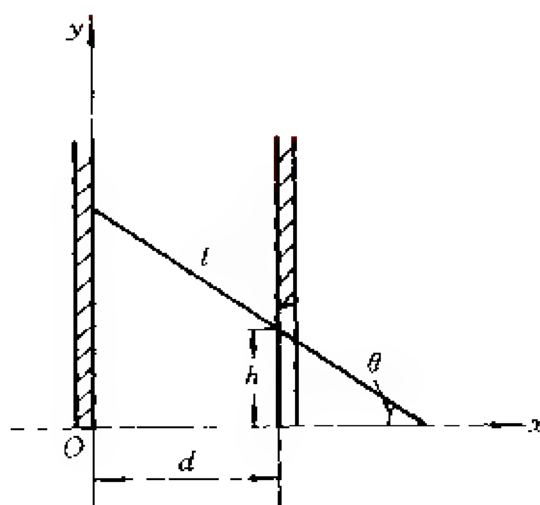


图 45　水塔示意图

$$l=\frac{d}{\cos\theta}+\frac{h}{\sin\theta}$$

因此，$h=l\sin\theta-d\,\mathrm{tg}\theta \qquad (0<\theta<\frac{\pi}{2})$，

现在计算 h 的极大值.

令
$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta}=l\cos\theta-d\frac{1}{\cos^2\theta}=0 \tag{1}$$

由(1)可解出驻点 $\theta_0=\arccos\sqrt[3]{\frac{d}{l}}$，当 $\theta<\theta_0$ 时，$\cos\theta>\cos\theta_0$，因此，$\cos^2\theta\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta}=l\cos^3\theta-d>l\cos^3\theta_0-d=0$，当 $\theta>\theta_0$ 时，$\cos\theta<\cos\theta_0$.

故，$\cos^2\theta\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta}=l\cos^3\theta-d<l\cos^3\theta_0-d=0$，即当 $\theta<\theta_0$ 时 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta}>0$，

当　$\theta>\theta_0$ 时　$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta}<0$，所以 $h(\theta)$ 在 $\theta=\theta_0$ 处取得极大值.

$$h_{max}=h(\theta_0)=l\sin\theta_0-d\,\mathrm{tg}\theta_0$$

$$=l\sqrt{1-\left(\frac{d}{l}\right)^{2/3}}-d\sqrt{\left(\frac{l}{d}\right)^{2/3}-1} \tag{2}$$

所以,门高 H 必须大于 h_{max},才有可能把水管运进水塔.

思考题: 设 $l=8$m,$d=4$m,水塔门高 $H=1.6$m,水管能搬进水塔吗?(答:不能.$h_{max}=1.8\text{m}>H$)

参考文献: [66].

46、何处看塑像最好

海洋公园中有一高为 a 米的鱼美人塑像,其底座高为 b 米.为了观赏时对塑像张成的夹角最大(即看得最清楚),应该站在离底座脚多远的地方?

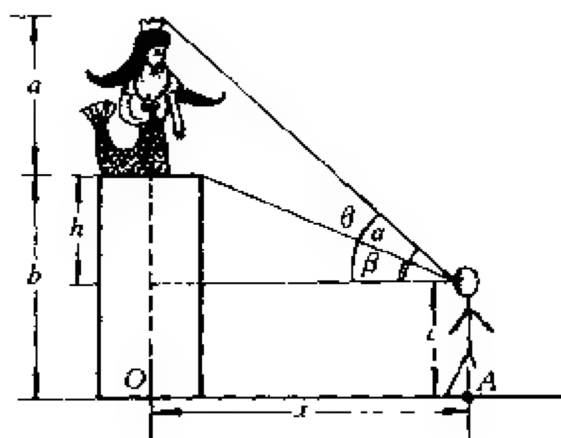


图 46 观看塑像示意图

解: 设游人的水平视线距地面 $c(<b)$米,底座的高与 c 之差为 h 米(图 46).可以想到,如果站得很远,那么张角 α 一定很小;如果站得离底座脚很近,那么 α 也很小.因此,一定有一最佳距离 $AO=x$,对于这个 x 所得张角 α 最大,并且 $\mathrm{tg}\alpha$ 也最大.

问题化为求 $\mathrm{tg}\alpha$ 的极值.

由
$$\mathrm{tg}\theta=\frac{a+h}{x},\mathrm{tg}\beta=\frac{h}{x}$$

得
$$\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}(\theta-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\theta-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\theta\cdot\mathrm{tg}\beta}$$

$$=\frac{\frac{a+h}{x}-\frac{h}{x}}{1+\frac{a+h}{x}\cdot\frac{h}{x}}=\frac{\frac{a}{x}}{1+\frac{(a+h)h}{x^2}}$$

$$=\frac{ax}{x^2+(a+h)h}$$

令
$$y=\mathrm{tg}\alpha=\frac{ax}{x^2+(a+h)h}$$

则
$$y'=\frac{a[x^2+(a+h)h]-ax\cdot 2x}{[x^2+(a+h)h]^2}$$

$$=\frac{ah(a+h)-ax^2}{[x^2+(a+h)h]^2}$$

令
$$y'=0,\text{得 } x^2=(a+h)h$$

即驻点 $x_0=\sqrt{(a+h)h}$

又 当 x 在 x_0 左侧邻近时 $y'>0$，右侧邻近时 $y'<0$，故 x_0 为极大值点.

结论：游人应站在离底座脚$\sqrt{(a+h)h}$处观赏鱼美人塑像为最好. 例如：

设 $a=2.5\text{m}, b=3\text{m}, c=1.7\text{m}$

则 $h=b-c=1.3\text{m}, \sqrt{(a+h)h}=\sqrt{3.8\times1.3}\doteq2.223\text{m}$

即游人站在离底座脚约 2.223m 处观赏最合适.

参考文献： [4], p.97~98.

47、咳嗽问题的研究

肺内压力的增加可以引起咳嗽，而肺内压力的增加伴随着气管半径的缩小，那末较小半径是促进了还是阻碍了空气在气管里

的流动？

解： 为简单起见，我们把气管理想化为一个圆柱形的管子．记管半径为 r，管长为 l，管的两端的压力差为 p，η 为流体的粘滞度．由物理学中的知识，在单位时间内流过管子的流体的体积为

$$V=\frac{\pi p r^4}{8\eta l} \tag{1}$$

实验证明：当压力差 p 增加，且在 $\left[0,\frac{r_0}{2a}\right]$范围内*，半径 r 按照方程

$$r=r_0-ap \tag{2}$$

减小，其中 r_0 为无压力差时的管半径，a 为正的常数．

∵ $r=r_0-ap$ 在条件 $0\leqslant p\leqslant\frac{r_0}{2a}$ 下成立，于是把 $p=\frac{r_0-r}{a}$ 代入 $0\leqslant p\leqslant\frac{r_0}{2a}$ 得 $\frac{r_0}{2}\leqslant r\leqslant r_0$ 因而(2)可用

$$p=\frac{r_0-r}{a},\ \frac{r_0}{2}\leqslant r\leqslant r_0 \tag{3}$$

替代．于是(1)式变为

$$V=\frac{\pi(r_0-r)r^4}{8\eta l a}=k(r_0-r)r^4,\ \frac{r_0}{2}\leqslant r\leqslant r_0 \tag{4}$$

其中 $k=\pi/8\eta l a$ 为常数．

下面我们从两方面来回答：较小半径的气管促进了还是阻碍了空气在气管里的流动？

1．什么样的 r 值使 V 最大？

由
$$V'(r)=kr^3(4r_0-5r)=0$$

∴
$$r=\frac{4}{5}r_0\in\left[\frac{r_0}{2},r_0\right]$$

---

* 当 $p>r_0/2a$ 时，气管的收缩有很大的阻力，这可避免在咳嗽时引起窒息．

当 $r\in\left(\frac{1}{2}r_0,\frac{4}{5}r_0\right)$时 $V'(r)>0$;当 $r\in\left(\frac{4}{5}r_0,r_0\right)$时,$V'(r)<0$

可见 $r=\frac{4}{5}r_0$ 时使单位时间内流过气管的气体体积最大.

2. 如果用 v 来表示空气在气管中流动的速度.显然

$V=v(\pi r^2)$,由(4)得

$$v=\frac{V}{\pi r^2}=\frac{k}{\pi}(r_0-r)r^2$$

由

$$v'(r)=\frac{k}{\pi}(2r_0-3r)r=0$$

得 $r=\frac{2r_0}{3}\in\left[\frac{r_0}{2},r_0\right]$. 同样可知 $r=\frac{2r_0}{3}$时,速度 v 取得取大值.

从上述两个方面来看,咳嗽时气管收缩(在一定范围内)有助咳嗽,它促进气管内空气的流动,从而使气管中的异物能较快地被清除掉.

参考文献: [25],上册,p.341~344.

48、如何选择最优批量

某工厂生产某型号车床,年产量为 a 台,分若干批进行生产,每批生产准备费为 b 元.设产品均匀投入市场,且上一批用完后立即生产下一批,即平均库存量为批量的一半.设每年每台库存费为 c 元.显然,生产批量大则库存费高;生产批量少则批数增多,因此生产准备费高.如何选择批量,才能使一年中库存费与生产准备费的和最小.

解: 设批量为 x,库存费与生产准备费的和为 $P(x)$,首先求出函数 $P(x)$.

因年产量为 a,所以每年生产的批数为$\frac{a}{x}$,则生产准备费为

$b \cdot \frac{a}{x}$.

因库存量为$\frac{x}{2}$,故库存费为 $c \cdot \frac{x}{2}$,因此可得

$$P(x)=\frac{ab}{x}+\frac{c}{2}x$$

其定义域为$(0,a]$.

其次,在不考虑生产能力的条件下,问每批生产多少台(即批量)时,$P(x)$为最小?

这是一个一元极值问题,对 $P(x)$求导得

$$P'(x)=-\frac{ab}{x^2}+\frac{c}{2}$$

令 $P'(x)=0$,有

$$cx^2-2ab=0$$

所以 $x=\pm\sqrt{\frac{2ab}{c}}$,舍去负根,得驻点 $x=\sqrt{\frac{2ab}{c}}$.又因 $P''(x)=\frac{2ab}{x^3}>0$,因此,当 $x=\sqrt{\frac{2ab}{c}}$时 $P(x)$取得极小值,也就是最小值.于是得出:要使一年中库存费与生产准备费之和最小的最优批量应为$\sqrt{\frac{2ab}{c}}$.因为批量应为 a 的正整数因子,所以有时$\sqrt{\frac{2ab}{c}}$还可能要进行调整.

例如,如果年产量为 1 100 台,每批生产准备费为 0.2 万元,每年每台库存费为 0.1 万元.这时最优批量为

$$x=\sqrt{\frac{2ab}{c}}=\sqrt{\frac{2\times 1\ 100\times 0.2}{0.1}}=66.33$$

因此可选取最优批量为 66 台.

参考文献: [7],p.178~179.

49、人在睡眠时气管中气流何时流速最大

设 R_0 表示气管的"休息半径"即一个人在休息(而不是睡着)时的气管的半径,我们用厘米来计量它,R 表示睡眠时的气管半径($R<R_0$);V 表示从 R_0 收缩到 R 时气管中空气的平均流速.在对靠近管壁的气流(我们假设它是很慢的)以及管壁的弹性(假设是"完全"的)作一些合理的假设后,我们可以用方程

$$V=\alpha(R_0-R)R^2\text{cm/s}$$

来模拟睡眠中的气流速度,其中 α 是一个常数,它依赖于气管壁的长度.

现在如果一个人开始熟睡,则可以期望他的气管以使得呼出的气流的速度为最大的方式收缩.求证:当气管半径收缩 $\frac{1}{3}$(即 $R=\frac{2}{3}R_0$)时 V 达到最大.这个事实已基本上被睡眠时用 X 光拍摄的照片所证实.

解: 这是一个极值问题,先求 V 的极值点

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}R}=2\alpha R_0R-3\alpha R^2$$

令
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}R}=0,\text{即 }2\alpha R_0R-3\alpha R^2=0$$

解得
$$R=\frac{2}{3}R_0$$

当 $R>\frac{2}{3}R_0$ 时,$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}R}<0$,$V$ 递减,

当 $R<\frac{2}{3}R_0$ 时,$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}R}>0$,$V$ 递增.

故 $R=\frac{2}{3}R_0$ 时,是 V 的最大值点,即当气管半径收缩 $\frac{1}{3}$ 时 V 达到最大.

参考文献： [1],上册,p.213.

50、隧道的车流量问题

巴巴拉(Barbara)接受了纽约市隧道管理局的一份工作，她的第一项任务就是决定每辆汽车以多大速度通过隧道可使车流量最大.通过大量的观察，她找到了一个很好的描述平均车速(km/h)与车流量(辆/秒)关系的函数：

$$f(v)=\frac{35v}{1.6v+\frac{v^2}{22}+31.1}$$

(a)问平均车速多大时，车流量最大？

(b)最大流量是多少？

解： (a)这是一个极值的问题：

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}=\frac{35(1.6v+31.1+\frac{v^2}{22})-35v(1.6+\frac{v}{11})}{(1.6v+31.1+\frac{v^2}{22})^2}$$

$$=\frac{35\times 31.1-\frac{35}{22}v^2}{(1.6v+31.1+\frac{v^2}{22})^2}$$

令$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}=0$，即 $v^2=684.2$ 得 $v=26.15$(km/h)

由实际问题知，当 v=26.15km/h 时，车流量最大.

(b)最大车流量是 $f(26.15)=8.8$(辆/秒)

参考文献： [53],p.192.

51、青蛙能跳多高

生物学家已发现了一个很好的数学模型来逼近人或动物跳跃时的轨迹.实际上这些轨迹是一个以起跳角度为参数的抛物线族

$$y(x)=x\tan\theta-\frac{4.877x^2}{v^2\cos^2\theta},(0\leqslant\theta\leqslant 90^\circ)$$

这里 x 为它在跳跃过程中所处位置与起跳点的水平距离(m),y 为它在跳跃过程中所处位置的垂直高度(m),v 为初始速度(m/s),θ 为起跳角度.

现讨论一只青蛙的跳跃问题.假设它的起跳角度为 30°,起跳速度是 4.5m/s,试问它能跳多高?

解: 将 $v=4.5\text{m/s},\theta=30^\circ$代入题中所给的曲线族方程,得

$$y(x)=x\text{tg}30^\circ-\frac{4.877x^2}{(4.5)^2\cdot\cos^2 30^\circ}\approx 0.577x-0.321x^2$$

所求青蛙的跳跃高度,即为 $y(x)$的最大值.

令
$$\frac{dy}{dx}=0.577-0.642x=0$$

可得驻点 $x\approx 0.899$,代入 $y(x)$的表达式

$$\begin{aligned}y(0.899)&=0.577(0.899)-0.321(0.899)^2\\&\approx 0.259(\text{m})\end{aligned}$$

故当青蛙以 4.5m/s 的初速度、30°的起跳角度起跳后,它将达到的最高高度约为 0.259 米.

思考题:试问在上述情况下,青蛙能跳多远?(1.798 米)

参考文献: [53],p.610～614.

52、楼顶设置绝热层的投资效果

住宅为防止冬季取暖时热量的散发所引起供热费用的提高与

夏季冷气的损失所引起制冷费用的提高,因而要考虑屋顶设置绝热层的问题.现有数据如下:顶楼面积为 A(平方米),铺设1公分厚,1平方米的绝热材料需 q 元,绝热材料的热传导系数为 k,使室内温度每升高1℃或降低1℃需用p元,室内要保持的温度与室外温度之差为 d(这里 d 为累计一年的温差总数.)绝热材料可使用10年.问设置多厚的绝热层最经济?

解: 首先算出铺设 x 厘米厚绝热材料需投资的费用

$$c_i(x)=q\cdot A\cdot x=ax, \text{其中 } a=q\cdot A$$

再计算铺设了 x 厘米厚的绝热材料后,10年中还需支付的供热费用及制冷费用

$$c_h(x)=10\cdot d\cdot\frac{k\cdot A}{x}\cdot p=10\cdot\frac{b}{x}, \text{其中 } b=d\cdot k\cdot A\cdot p.$$

所以,总费用 $c(x)=c_i(x)+c_h(x)=ax+\frac{10b}{x}$,$0<x<+\infty$.求使 $c(x)$ 为最小值时的 x 值.

$$c'(x)=a-\frac{10b}{x^2}=0, x=\sqrt{\frac{10b}{a}}$$

因为 $c(x)$ 只有一个极值点,并且在该点 $c''(x)=\frac{20b}{x^3}>0$.所以 $c(x)$ 在 $x=\sqrt{\frac{10b}{a}}$ 时取得最小值.

参考文献: [25],上册,p.354.

53、酒瓶对酒厂利润的影响

某制造商制造并出售球形瓶装的某种酒.瓶子的制造成本是 $0.8\pi r^2$(分),其中 r 是瓶子的半径,单位是厘米.假设每售出1立方厘米的酒,商人可获利0.2分.他能制作的瓶子最大半径为6厘米,问

a.瓶子半径多大时,能使每瓶酒获利最大?

b.瓶子半径多大时,每瓶酒的获利最小?

解: 瓶子半径为 r,每瓶酒能获利

$$p(r)=\frac{4}{3}\pi r^3\cdot 0.2-0.8\pi r^2=\frac{0.8}{3}\pi r^3-0.8\pi r^2$$

$$=0.8\pi\left(\frac{r^3}{3}-r^2\right),\qquad 0<r\leqslant 6$$

$$P'(r)=0.8\pi(r^2-2r)$$

$r=2$ 时,$P'=0$. $r\in(0,2)$,$P'<0$;$r\in(2,6)$,$P'>0$. $P(r)$只有一个极值点,所以 $r=2$ 是最小值点,$r=6$ 时,$P(r)$可达最大值.所以半径越大,获利越多,半径为 2 厘米时,获利最小.这时 $P(2)<0$,表示此种瓶内酒所获得的利润还不够瓶子的成本.又$\because x\in(0,2)$时 $P'(r)<0$.所以,在$(0,2)$,$P(r)$是减函数.说明半径小于 2 厘米的瓶装酒,酒所获得的利润抵不上瓶子的成本.由 $P(3)=0$ 知,当瓶子的半径达 3cm 时,酒的盈利与瓶子的成本恰好一样.瓶子的半径越大,制造商的盈利越多.因而当商人要求售出同量酒而又要获得同等的盈利时,对半径小于 3cm 的瓶装酒定价要高些.所以,市场上小包装的货物一般比大包装的都要贵些.

参考文献: [3],上册,p.383.

54、杂技新招

某杂技团刻意求新,在某海滨城市演出时,利用当地靠海的条件,设计了这样一个惊险节目:在离开海边 9 米的沙滩上,建一 10 米高台,高台下 5 米处置一极富弹性的斜面(用弹簧编织而成),斜面与水平面成 45°角.然后让演员从高台团身跳下,经与斜面碰撞后将其弹到海里.不知这个方案是否可行,请鉴定.

如图 54,演员的表演分三个阶段完成:自由落体,碰撞,平抛.

判断该方案是否可行，就是看经过这样的运动后能否平安地落入海中．这只需计算平抛阶段的水平距离是否大于9米即可．

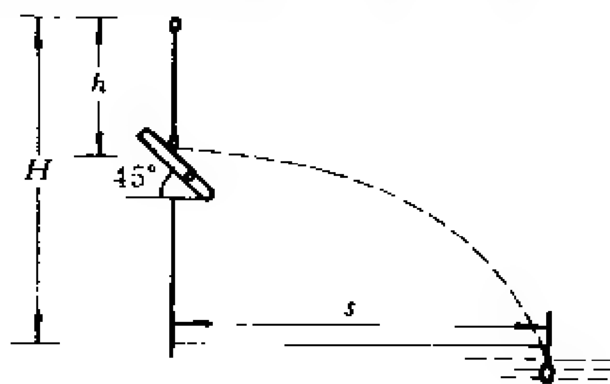


图54 弹板跳海示意图

为分析问题方便，我们记高台、高台距离斜面的高度分别为 H 和 h，水平距离为 s，显然，s 是 h 的函数，问题转化为求 $s(h)$ 的极大值．

演员碰到斜面时的速度 $v_1=\sqrt{2gh}$，由于可以假定是弹性碰撞，因面他水平飞出的速度 $v_2=v_1$，水平飞去的距离

$$s=v_2t=\sqrt{2gh}t \tag{1}$$

(1)式中的 t 等于演员从 $(H-h)$ 米处自由下落需要的时间，其值为

$$t=\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} \tag{2}$$

将(2)式代入(1)得

$$s=2\sqrt{h(H-h)} \tag{3}$$

令 $\frac{ds}{dh}=0$， 得

$$\frac{1}{\sqrt{h(H-h)}}(H-2h)=0$$

解之，得 $H=2h$，或 $h=\frac{1}{2}H$．即把斜面放在全离的一半处，就可

得到最大的水平距离.由(3)式知,这个最大的水平距离为 $s=2\sqrt{\frac{H}{2}(H-\frac{H}{2})}=H$.现已知 $H=10$ 米,$h=5$ 米,正好符合条件,故演员水平飞出的距离可达10米,而高台离海边仅9米,且斜面又由极富弹性的材料制成,所以演员定能安全掉进水中,方案是可行的,不必惊慌.非但如此,即使是一般人,只要敢跳,也是没有危险的,因而建议旅游部门据此建一新的娱乐场所——"弹板跳海".

注:以上毕竟只是理论计算的结果.究竟能否实施,还有许多实际问题要考虑.比如,海水是否足够深;弹性斜面的质量能否保证;沙滩上建立高台结实吗?等等.

参考文献: [13],p.175.

55、哈哈镜的原理

无论是漂亮的姑娘,还是英俊的小伙,一走到哈哈镜前,她(他)的模样便面目全非了.这是什么缘故?哈哈镜为何有此"魔力"?要回答这个问题,得从曲面镜的反射谈起.

在中学物理课上,老师用简单的几何方法论证了著名的光的反射定律,那就是光在平面镜上的反射遵守这样的法则:反射角=入射角(见图55-1).现在要问:光对曲面镜的反射是否也有此规律?如果是,怎样推导呢?下面,我们用导数作工具来解决这个问题.

如图55-2,S 为光源,Q 为注视镜面的一只眼.根据费马(Fermat)原理(经过一面镜子从而把 S 和 Q 两点连接起来的所有可能的路径 SMQ 之中,光沿着最省时间的路径传播),反射点 M 应为曲面镜上使总长

$$d=SM+MQ$$

最短的点.建立如图55-2所示的坐标系:取 M 点为坐标原点,镜

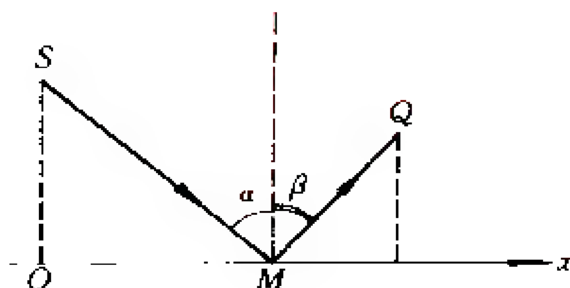


图 55－1　光对平面镜的反射

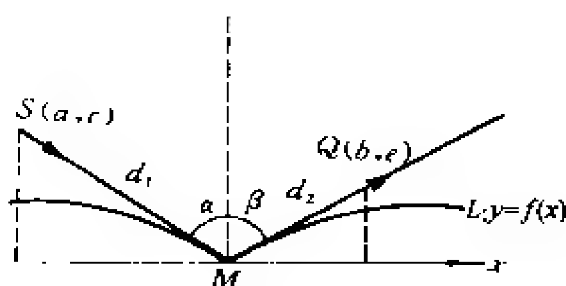


图 55　2　光对曲面镜的反射

面在 M 点的切平面记为 n，n 在 M 点的法线即为镜面在 M 点的法线．由点 S 及该法线所确定的平面为坐标平面，它与切平面 n 的交线为 x 轴．设镜面与坐标平面的交线 L 的方程为 $y=f(x)$，则它应满足 $f(0)=0,f'(0)=0$

用 (a,c) 表示 S 点的坐标，(b,e) 表示 Q 点的坐标，则 L 上任一点 $(x,f(x))$ 到 S 与到 Q 的距离之和 d 可以表成 $d(x)=d_1(x)+d_2(x)$ 或

$$d(x)=\sqrt{(x-a)^2+(f(x)-c)^2}+\sqrt{(b-x)^2+(f(x)-e)^2}$$

d 的最小值在 $x=0$ 处达到，因此 $d'(0)=0$．对上式两边求导，得

$$d'(x)=\frac{(x-a)+f'(x)(f(x)-c)}{d_1(x)}+\frac{-(b-x)-f'(x)(f(x)-e)}{d_2(x)}$$

由于在 M 点 $f'(0)=0$，$d'(x)$ 在 $x=0$ 的值则简化为

$$d'(0)=-\frac{a}{d_1}-\frac{b}{d_2}=0$$

即
$$\frac{-a}{d_1}=\frac{b}{d_2} \qquad (1)$$

关系式(1)的几何解释是：入射角 α 的正弦等于反射角 β 的正弦．由于 α、β 都是锐角，故 α 应等于 β．即(1)式表明反射角等于入射角．我们得到了与平面镜反射一致的结论．所不同的是，这些角是射线与曲面镜在反射点的法线的夹角．

曲面镜反射和平面镜反射的不同点还在于：对于一个曲面镜来说，可能有几个 M 点都使 $SM+MQ$ 达到最小．一个观察者站在 Q 点，他能通过曲面上任何一个这样的 M 点看到位于 S 点的目标．哈哈镜的原理就在于此．

参考文献： [2]，p.138～139．

56、一年中哪一天白天最"长"

据资料记载，某地某年间隔30天的日出日落时间如下：

表56 日出日落数据表

	5月1日	5月31日	6月30日
日出	4:51	4:17	4:16
日落	19:04	19:38	19:50

请问，这一年中哪一天最"长"？

解： 在解答这个问题之前，我们先简要介绍一下有关插值的知识．

在实际中遇到的函数，有许多是用表格方式给出的．例如通过实验观测，得到了某个函数 $y=f(x)$ 在一系列点 $x_0,x_1,x_2,\cdots$ 上的函数值 $y_0,y_1,y_2,\cdots$，但对应于 x 的其它值的函数值却是未知的．这种表格函数，不便于分析其性质和变化规律，特别还不能直接求出表中没有列出的点处的函数值．因此，常希望能找到这种函数的一个分析表达式，即使是近似的也好．此外，有些函数的分析

表达式很复杂，直接用来计算函数值、求导和积分以及进行理论分析都不方便，也希望由原来的表达式求出若干组数据，进而构造出一个简单的函数来近似地表达原来的函数.

插值法就是寻求函数近似表达式的一种方法.由于代数多项式最简单，所以常用它来近似表达复杂的函数或表格函数.具体点说，就是已知 $y=f(x)$ 在 $n+1$ 个点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的值 $y_0,y_1,\cdots,y_n$，要求一个次数不超过 n 的多项式 $p(x)$，使之满足 $p(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n)$. 这样一个问题就是插值问题，求出的 $p(x)$ 就叫做函数 $y=f(x)$ 的插值多项式.插值公式有多种，这里我们直接引用其中的一个，即

$$f(x)\approx L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)y_i \tag{1}$$

例如，当 $n=1$ 时，有

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

当 $n=2$ 时，有

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

我们称(1)为拉格朗日(Lagrange)插值公式.

现在转回我们的主题.为了方便起见，设由5月1日开始计算的天数为 x，5月1日看作是第0天($x=0$).再设每一天白天的长度(日出与日落之间的时数)为14小时13分 $+T$(因5月1日白天的长度为14小时13分)，于是，天数和它的长度可以用点 (x,T) 表示.有记载的三天数据对应于点(0,0)，(30,68)，(60,81)，将它们代入三点拉格朗日插值公式，得

$$T=\frac{(x-30)(x-60)}{(0-30)(0-60)}\cdot 0+\frac{(x-0)(x-60)}{(30-0)(30-60)}\cdot 68$$

$$+\frac{(x-0)(x-30)}{(60-0)(60-30)}\cdot 81$$

或

$$T=\frac{x(-55x+5730)}{1800}$$

T 的极大值点由 $T'(x)=0$ 求出,得

$$x=\frac{5730}{110}=52.09$$

所以,最长的一天是5月1日以后的第52天,确切地说,是6月22日.再由 $T=83$ 分,可得这一天日出与日落之间的时数为15小时36分.

注:"夏至"是一年中白天最长、夜里最短的一天,一般在每年的6月21日或22日,本例所得结果与上述常识是吻合的.

参考文献: [3],p.218~219;[15],天文1,p.270~272.

57、您的书写灯应该挂多高

一个灯泡悬吊在半径为 r 的圆桌的正上方,桌上任一点受到的照度与光线的入射角的余弦值成正比(入射角是光线与桌面的垂直线之间的夹角),而与光源的距离平方成反比.欲使桌子的边缘得到最强的照度,问灯泡应挂在桌面上方多高?

解: 如图57所示,在桌子边缘处的照度

$A=k\cdot\frac{\cos\theta}{R^2}$,其中 k 为比例常数,R 为灯到桌子边缘的距离.

设 h 为灯到桌面的垂直距离,

于是,

$$R^2=r^2+h^2,\cos\theta=\frac{h}{R}=\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

$$\therefore\quad A=k\cdot\frac{h}{(r^2+h^2)^{3/2}}$$

对 h 求导

$$A' = k\cdot\frac{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}} - h\cdot\frac{3}{2}\cdot(r^2+h^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2h}{(r^2+h^2)^3} = 0$$

得 $r^2+h^2-3h^2=0, h=\frac{\sqrt{2}}{2}r$. 容易验证此时 A 取最大值.

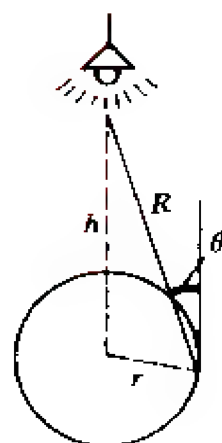


图 57 灯、桌子、人射角之间的关系

做了这道题后，当您在晚上阅读或书写时，是否考虑设计一下您的书写灯的位置，使您在工作时能得到最佳的照度？

思考题： 一盏灯挂在一米见方的方桌的正上方，此灯挂多高(离桌面)才能使

1) 桌子四边的中点处照度最大？ $(\frac{\sqrt{2}}{4}m)$

2) 桌子四个角的照度最大？ $(\frac{1}{2}m)$

58、鱼群的适度捕捞

鱼群是一种可再生的资源. 若目前鱼群的总数为 x 公斤，经过一年的成长与繁殖，第二年鱼群的总数变为 y 公斤. 反映 x 与 y 之间相互关系的曲线称为再生产曲线，记为 $y=f(x)$.

现设鱼群的再生产曲线为 $y=rx\left(1-\frac{x}{N}\right)$，$(r>1)$. 为保障鱼群的数量维持稳定，在捕鱼时必须注意适度捕捞. 问鱼群的数量控制在多大时，才能使我们获取最大的持续捕获量？

解： 首先，我们对再生产曲线 $y=rx\left(1-\frac{x}{N}\right)$的实际意义作简略解释. r 是鱼群的自然增长率，故一般可以认为 $y=rx$. 但是，由于自然资源的限制，当鱼群的数量过大时，其生长环境就会恶

化，导致鱼群增长率的降低．为此，我们乘上一个修正因子$\left(1-\dfrac{x}{N}\right)$，其中 N 是自然环境所能负荷的最大鱼群数量．于是，$y=rx\left(1-\dfrac{x}{N}\right)$．

设每年的捕获量为 $h(x)$，　　则第二年的鱼群总量为 $y=f(x)-h(x)$．要限制鱼群总量保持在某一数值 x，则

$$x=f(x)-h(x)$$

所以，$h(x)=f(x)-x=rx\left(1-\dfrac{x}{N}\right)-x=(r-1)x-\dfrac{r}{N}x^2$　　(1)

现在求 $h(x)$的极大值：

$$h'(x)=(r-1)-\frac{2r}{N}x=0 \qquad (2)$$

解出驻点　$x^*=\dfrac{(r-1)N}{2r}$

由于　　$h''(x)=-\dfrac{2r}{N}<0$

所以　$x^*=\dfrac{r-1}{2r}N$ 是$h(x)$的极大点．

因此，鱼群规模控制在 $x^*=\dfrac{r-1}{2r}N$ 时，可以使我们获得最大的持续捕获量．

此时，$h(x^*)=(r-1)x^*-\dfrac{r}{N}x^{*2}$

$$=(r-1)\cdot\frac{(r-1)}{2r}N-\frac{r}{N}\cdot\frac{(r-1)^2}{4r^2}N^2$$

$$=\frac{(r-1)^2}{4r}N$$

即最大持续捕获量为$\dfrac{(r-1)^2}{4r}N$．

思考题： 某鱼塘最多可养鱼 10 万公斤，若鱼量超过 10 万公斤，由于缺氧等原因会造成鱼群大范围死亡．根据经验知鱼群年自

然增长率为 4,试计算每年的合理捕捞量.($x^* = 3.75$ 万公斤,$h(x^*) = 5.625$ 万公斤)

参考文献: [65],p190.

59、大衣柜能搬进新居吗

问题:老张临搬家前,站在自已大衣柜旁发愁.担心这大衣柜搬不进新居,站在一旁的小李马上拿了一把尺子出去了.不一会儿,小李对老张说:"从量得电梯前楼道和单元前楼道宽度,绝对没问题".请问小李的根据是什么?

解: 设电梯前楼道宽 am,单元前楼道宽 bm,二条楼道成直角相交,大衣柜长为 L,搬运拐弯时与某一楼道夹角为 φ.

设:

$$CD = L$$

$$CO = L_1 \quad OD = L_2$$

$$L = CO + OD = L_1 + L_2$$

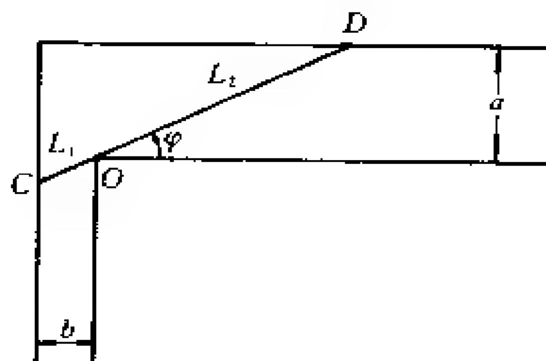


图 59 搬运示意图

$$L_1 = \frac{b}{\cos\varphi}, L_2 = \frac{a}{\sin\varphi}$$

$$L=L_1+L_2=\frac{b}{\cos\varphi}+\frac{a}{\sin\varphi}$$，即 L 是 φ 的函数.

求 L 的一阶导数

$$\frac{dL(\varphi)}{d\varphi}=\frac{b\sin\varphi}{\cos^2\varphi}-\frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}=\frac{b\sin^3\varphi-a\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}$$

求驻点 $\frac{dL(\varphi)}{d\varphi}=0, b\sin^3\varphi-a\cos^3\varphi=0$

$$b\sin^3\varphi=a\cos^3\varphi, \mathrm{tg}^3\varphi=\frac{a}{b}, \mathrm{tg}\varphi=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$$

得 $\varphi=\arctan\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$

代入 $L(\varphi)=\frac{b}{\cos\varphi}+\frac{a}{\sin\varphi}$ 中

求得 $L\Big|_{\varphi=\arctan\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}}=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$，它一定是 L 的最大值.今大衣柜的长度不大于 $(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$，所以小李告诉老张绝对没问题.

从这数学式子中，a 与 b 的关系是对称的，a 大于 b 或 a 小于 b 是无关紧要的.

参考文献： [56]，p.198～199.

60、心输出量

心输出量是指心脏(一侧心室)每分钟泵出的血液量.这个指标有重要的临床价值，在危重病人的监护方面更是重要的生理指标.通过测量每分钟人体的耗氧量及血样中氧的浓度可以算出心输出量.

设 c 为心脏每分钟泵出的血液量(升)，即心输出量；x 为每分钟人体的耗氧量(ml)；y 为每升动脉血中的含氧量(ml)；z 为每升

混合静脉血中的含氧量(ml).

每分钟人体的耗氧量=[从每升血中获得的氧气量]·[心输出量]

即 $$x=(y-z)\cdot c,\text{所以 } c=\frac{x}{y-z}.$$

x、y 的值能相当精确地测得,但 z 的值很难准确测得.假设某人在安静状态下,测得 $x=250$ml/min, $y=180$ml/l, $z=140$ ml/l,则 $c=6.25$l/min.若测量值 z 的相对误差为 1%,试估计 c 的绝对误差及相对误差.

解: z 的相对误差为 1%,即 $\frac{dz}{z}=1\%$, $\therefore dz=1\%z$.

$$c=\frac{x}{y-z},\quad \therefore\quad dc=\frac{xdz}{(y-z)^2}$$

所以 c 的绝对误差为 $|dc|=\frac{250\times140\times1\%}{(180-140)^2}=7/32$, c 的相对误差为 $\left|\frac{dc}{c}\right|=\frac{7/32}{6.25}=3.5\%$.

可见,测量值 z 的微小误差导致心输出量计算结果的较大误差.目前尚无完善的直接测定心输出量的方法.

参考文献: [36],p.274~275;[49],p.208;[47],p.355~356.

61、为什么不宜制造太大的核弹头

核弹在与它的爆炸量(系指核裂变或聚变时释放出的能量,通常用相当于多少千吨 T.N.T 炸药的爆炸威力来度量)的立方根成正比的距离内会产生每平方厘米 0.3516 千克的超压,这种距离算作有效距离.若记有效距离为 D,爆炸量为 x,则二者的函数关系为

$$D=Cx^{\frac{1}{3}}$$

其中 C 是比例常数.又知当 x 是 100 千吨(T.N.T 当量)时,有效距离 D 为 3.2186 千米.于是

$$3.2186=C\cdot 100^{\frac{1}{3}}$$

即
$$C=\frac{3.2186}{100^{\frac{1}{3}}}\approx 0.6934$$

所以
$$D=0.6934x^{\frac{1}{3}}$$

这样,当爆炸量增至 10 倍(变成 1 000 千吨 = 百万吨)时,有效距离增至

$$0.6934\times(1000)^{\frac{1}{3}}=6.934(\mathrm{km})$$

差不多仅为 100 千吨时的 2 倍,说明其作用范围(πD^2)并没因爆炸量的大幅度增加而显著增加.

下面再来研究爆炸量与相对效率的关系(这里相对效率的含义是,核弹的爆炸量每增加 1 千吨 T.N.T 当量时有效距离的增量).

由 $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{3}\cdot 0.6934\cdot x^{-\frac{2}{3}}=0.2311x^{-\frac{2}{3}}$

知
$$\Delta D\approx 0.2311x^{-\frac{2}{3}}\cdot\Delta x$$

若 $x=100,\Delta x=1$,则

$$\Delta D\approx 0.2311(100)^{-\frac{2}{3}}\approx 0.0107(\mathrm{km})=10.7(\mathrm{m})$$

这就是说,对 100 千吨(10 万吨级)爆炸量的核弹来说,爆炸量每增加 1 千吨,有效距离差不多增加 10.7 米;

若 $x=100,\Delta x=1$,则

$$\Delta D\approx 0.2311(1\,000)^{-\frac{2}{3}}\approx 0.0023(\mathrm{km})=2.3(\mathrm{m})$$

即对百万吨级的核弹来说,每增加 1 千吨的爆炸量,有效距离差不多仅增加 2.3m,相对效率是下降的.

可见,除了制造、运载、投放等技术因素外,无论从作用范围还

是从相对效率来说，都不宜制造当量级太大的核弹头．事实上，1945年二战中美国投放在日本广岛、长崎的原子弹，其爆炸量为20千吨，有效距离为1.87千米．

参考文献： [1]，p.161.

62、玻璃钢瓶还能用吗

玻璃钢瓶的制作过程是，先用玻璃纤维沿经向和纬向缠绕成型(图62)，然后再加工处理成质地如钢的玻璃瓶．我们知道，纤维在压力作用下(设瓶内充以高压氧气)会伸长，若纤维原长是 l，在压力作用下伸长 Δl，则称 $\frac{\Delta l}{l}$ 为纤维的应变，习惯上用符号 ε 表示．有一种很小的仪器，只要往瓶上一贴，即可测出纤维的应变．现测出经向纤维的应变为 $\varepsilon_\theta = \frac{\Delta H}{H}$，纬向纤维的应变 $\varepsilon_\varphi = \frac{2\pi\Delta k}{2\pi R} = \frac{\Delta R}{R}$，问瓶子体积的应变是多少？当体积应变超过规定的标准时，瓶子就不能继续使用，所以必须有简单的方法求出体积的变化．

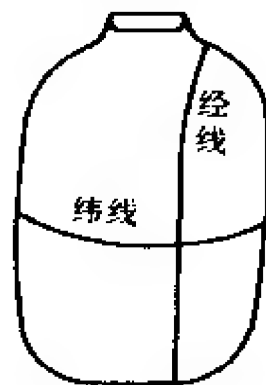


图62　玻璃钢瓶示意图

实际问题往往是合理的近似就行，不必要也不可能要求绝对的准确．我们把玻璃钢瓶近似看成一个高为 H，底半径为 R 的圆柱体．其体积为

$$V = \pi R^2 H$$

由经线、纬线的伸长，使瓶的体积有一增量 ΔV，

$$\Delta V \approx dV = 2\pi RH\Delta R + \pi R^2 \Delta H$$

于是体积的应变为

$$\frac{\Delta V}{V}\approx\frac{2\pi RH\Delta R}{\pi R^2 H}+\frac{\pi R^2 \Delta H}{\pi R^2 H}$$

$$=2\frac{\Delta R}{R}+\frac{\Delta H}{H}=2\epsilon_\varphi+\epsilon_\theta$$

这说明体积的应变等于两倍纬线的应变加上经线的应变，只要考虑这个值是否超过规定的标准，即可决定钢瓶能否继续使用.

参考文献： [5],p.56～57.

63、重力加速度问题

一物体质量为 m，距地面高度为 h，由万有引力定律.知地球对它的引力为

$$f=G\frac{mM}{(R+h)^2}$$

其中 $R=6\ 371$ 公里，是地球的半径，M 是地球的质量，G 是常数.又据牛顿第二定律知

$$f=mg$$

于是由以上两式得

$$g=\frac{GM}{(R+h)^2} \tag{1}$$

这就是重力加速度随高度 h 变化的公式.显然，这个公式对计算 g 是不实用的(因为公式中有 M、G).我们想找一个合适的近似公式取代它.

当物体在地球表面时，$h=0$，若用 g_0 表示此时的重力加速度，则 $g_0=\frac{GM}{R^2}$.将 $GM=g_0R^2$ 代入(1)式，得

$$g=\frac{g_0R^2}{(R+h)^2}=g_0\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2}$$

当 h 相对于地球半径 R 很小时，即 $\frac{h}{R}\ll 1$ 时，利用近似公式

$(1+x)^a \approx 1+ax$，可得

$$g = g_0\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2} \approx g_0\left(1-2\frac{h}{R}\right)$$
$$= g_0\left(1-\frac{2h}{6\ 371}\right) = g_0(1-3.14\times10^{-4}h)$$

这里 R 的单位是 km，因此 h 的单位也应是 km.

这就是重力加速度随高度变化的近似公式，只要知道 h 及 g_0 的值即可算出 g 的近似值. 例如，北京地区的 $g_0 = 980.122\text{cm/s}^2$（利用单摆摆动可以测定 g_0 的值，其公式为 $g_0 = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$，式中 l 为摆长，T 为振动周期），于是在 $h=5\ 000$ 米的高空，重力加速度为

$$g \approx 980.122(1-3.14\times10^{-4}\times5)$$
$$= 978.58(\text{cm/s}^2)$$

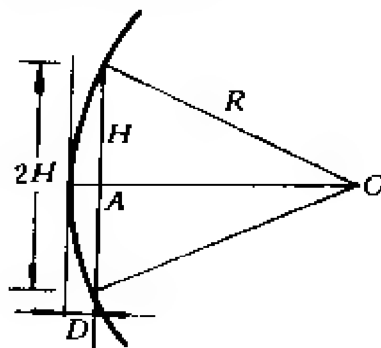


图 63　凸透镜示意图

思考题： 有一凸镜，其镜面是一半径为 R 的球面，镜的口径为 $2H$，H 比 R 小得多，试问透镜的厚度 D 为多少？$\left(\text{答案：}D\approx\frac{H^2}{2R}\right)$

参考文献： [16]，p.124～125.

64、钟表每天快多少

某家有一机械挂钟，钟摆的周期为1秒.在冬季，摆长缩短了0.01厘米，这只钟每天大约快多少？

解： 由 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$（单摆的周期公式，其中 l 是摆长(单位：cm)，g 是重力加速度(980cm/s^2)）可得

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}l}=\frac{\pi}{\sqrt{gl}}$$

当 $|\Delta l|\ll l$ 时，

$$\Delta T\approx dT=\frac{\pi}{\sqrt{gl}}\Delta l \qquad (1)$$

据题设，摆的周期是1秒，即 $1=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，由此可知摆的原长是 $\frac{g}{(2\pi)^2}$(cm).现摆长的改变量 $\Delta l=-0.01$ 厘米，于是由(1)式得摆的周期的相应改变量是

$$\Delta T\approx dT=\frac{\pi}{\sqrt{g\cdot\frac{g}{(2\pi)^2}}}\times(-0.01)$$

$$=\frac{2\pi^2}{g}\times(-0.01)\approx-0.0002(\text{s})$$

这就是说，由于摆长缩短了0.01厘米，钟摆的周期便相应缩短了约0.0002秒，即每秒约快0.0002秒，从而每天约快 $0.0002\times24\times60\times60=17.28(\text{s})$.

参考文献： [14]，p.318～319.

65、如何计算储存在容器中苯的损失量

在一圆筒形的储槽中储放着苯.在液体苯上面的蒸气空间的体积 $V_0=250$(米^3),此蒸气空间借一连通管与大气相通.一昼夜中,最高及最低的温度为 37.8℃ 及 10℃,大气压为 760(毫米汞柱).试计算在一昼夜中苯的最大损失量.

解: 由化工知识知道,苯的蒸气压可用下式求得:

$$\lg P = 7.962 - \frac{1.781}{T} \qquad (1)$$

式中 P 以(毫米汞柱)计 T 以(°K)计.

苯的损失发生在这样的情况下,即当蒸气空间的苯—空气的混合物受到热而膨胀,从而从连通管中逸入大气中;当温度降低时,新鲜空气被吸入蒸气空间,而当温度再度上升时,又重新排出已经和某些数量的苯相混合的空气.

在无内部热源的情况下,当液体苯上面的空气在周围介质的温度下被苯蒸气所完全饱和时,苯的损失最大.

苯的损失由同时进行的两个过程所决定,每一种过程都引起液体苯上方的苯蒸气与空气混合物的膨胀.第一种过程的发生是由于苯蒸气—空气混合物受到了单纯的热膨胀,此时增加的体积为

$$dv_T = V_0 \frac{dT}{T} \qquad (2)$$

第二种过程是由于温度升高时,苯蒸气—空气混合物中的浓度增加所造成的,这可按(1)式来计算.设 y 为苯在蒸气空间的分子分数(即苯的克分子数与苯蒸气—空气混合物的克分子数之比),此时苯的体积,在总压力下为 yv_0.因为当温度升高时,苯的蒸气压增大了(由(1)式可以看出这个事实),于是就改变了苯蒸气—空气混合物的组成,此时苯的蒸发量 dv_y 为

$$dv_y = d(yv_0) = v_0 dy \tag{3}$$

因此，苯的体积的总改变量 dv 为

$$dv = dv_T + dv_y = V_0\left(\frac{dT}{T} + dy\right) \tag{4}$$

由化工知识知道，苯的分子分数等于苯的蒸气压与苯蒸气—空气混合物的气压之比，即

$$y = \frac{P}{760}$$

这里的 P 是苯在温度 T 时的蒸气压.

这时有

$$dy = \frac{dP}{760} \tag{5}$$

为了确定苯的损失量，须求出相当于 dv 体积的苯的重量. 这个关系式可以直接用气体定律来求得：

$$dN = \frac{Pdv}{RT}$$

式中：dN 为被苯所饱和 dv（米^3）的空气所带走的苯的千克分子数；R 为气体常数，其值为 820（千克米/千克分子·度）.

于是

$$dN = \frac{1}{R}\frac{P}{T}dv \approx 0.0012\frac{P}{T}dv \tag{6}$$

将(4)式中的 dv 代入(6)式，并注意到(5)，得

$$dN \approx 0.0012\frac{P}{T}V_0\left(\frac{dT}{T} + \frac{dP}{760}\right)$$

$$= 0.0012 \times 250\left(\frac{PdT}{T^2} + \frac{PdP}{760T}\right)$$

$$= 0.3\left(\frac{PdT}{T^2} + \frac{PdP}{760T}\right) \tag{7}$$

由(1)式解出 P，得到 P 与 T 的关系式：

$$P = e^{2.3\left(7.962 - \frac{1.781}{T}\right)} \tag{8}$$

由(8)式也可得到

$$\frac{1}{T}=\frac{7.962-\frac{\ln P}{2.3}}{1.781} \tag{9}$$

将(8)、(9)式代入(7)，得

$$dN=0.3\left[e^{2.3(7.962-\frac{1.781}{T})}\frac{dT}{T^2}\right.$$

$$\left.+\frac{P}{760\times1.781}(7.962-\frac{\ln P}{2.3})dP\right] \tag{10}$$

对(10)式两边积分，下限 $T_1=283$°K(由(8)式可得到相应的 P_1 值)，上限 $T_2=310.8$°K(由(8)式也可得到相应的 P_2 值)．并注意到下列两个不定积分公式：

$$\int e^{a-\frac{b}{T}}\frac{dT}{T^2}=\frac{1}{b}\int e^{a-\frac{b}{T}}d\left(a-\frac{b}{T}\right)=\frac{1}{b}e^{a-\frac{b}{T}}+C$$

$$\int P\ln PdP=\frac{1}{2}\int \ln PdP^2=\frac{1}{2}P^2(\ln P-\frac{1}{2})+C$$

于是得到：

$$N=\frac{0.3}{2.3\times1.781}\left[e^{2.3(7.962-\frac{1.781}{T})}\right]_{283}^{310.8}$$

$$-\frac{0.3}{760\times1.781\times2.3}\left[P^2\left(\frac{\ln P}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]_{P_1}^{P_2}$$

$$+\frac{0.3\times7.962}{760\times1.781\times2}[P_2^2-P_1^2]$$

将相应的 P_1，P_2 值算出后代入上式，计算得：

$$N=0.0268(\text{千克分子})$$

因为苯的分子量为78，所以储槽内的苯每昼夜最大损失量为

$$0.0268\times78=2.1(\text{kg})$$

参考文献： [32]. p. 140～142.

66、石油的消耗量

近年来，世界范围内每年的石油消耗率呈指数增长，增长指数大约为 0.07. 1970 年初，消耗率大约为每年 161 亿桶. 设 $R(t)$ 表示从 1970 年起第 t 年的石油消耗率，则 $R(t)=161e^{0.07t}$（亿桶）. 试用此式估算从 1970 年到 1990 年间石油消耗的总量.

解： 设 $T(t)$ 表示从 1970 年起 $(t=0)$ 直到第 t 年的石油消耗总量.

我们要求从 1970 年到 1990 年间石油消耗的总量，即求 $T(20)$.

由于 $T(t)$ 是石油消耗的总量，所以 $T'(t)$ 就是石油消耗率 $R(t)$，即 $T'(t)=R(t)$. 那么 $T(t)$ 就是 $R(t)$ 的一个原函数.

$$T(t)=\int R(t)dt=\int 161e^{0.07t}dt=\frac{161}{0.07}e^{0.07t}+C$$

$$=2300e^{0.07t}+C$$

$$\because \quad T(0)=0 \quad \therefore \quad C=-2300$$

$$\therefore \quad T(t)=2300(e^{0.07t}-1)$$

从 1970 年到 1990 年间石油的消耗总量为：

$$T(20)=2300(e^{0.07\times 20}-1)\approx 7\,027\text{（亿桶）}$$

参考文献： [47], p. 271～275.

67、租客机还是买客机

某航空公司为了发展新航线的航运业务，需要增加 5 架波音 747 客机. 如果购进一架客机需要一次支付 5000 万美元现金，客机的使用寿命为 15 年. 如果租用一架客机，每年需要支付 600 万美元的租金，租金以均匀货币流的方式支付. 若银行的年利率为

12%，请问购买客机与租用客机哪种方案为佳？如果银行的年利率为 6% 呢？（均匀货币流概念请参阅第 92 题）．

解： 购买一架飞机可以使用 15 年，但需要马上支付 5000 万美元．而同样租一架飞机使用 15 年，则需要以均匀货币流方式支付 15 年租金，年流量为 600 万美元．两种方案所支付的价值无法直接比较，必须将它们都化为同一时刻的价值才能比较．我们以当前价值为准．

购买一架飞机的当前价值为 5000 万美元．

下面计算均匀货币流的当前价值：设 $t=0$ 时向银行存入 $Ae^{\ rt}$ 美元，按连续复利计算，t 年之后在银行的存款额恰好是 A 美元．也就是说，t 年后的 A 美元在 $t=0$ 时的价值为 Ae^{-rt} 美元．那么，对流量为 a 的均匀货币流，在 $[t,t+\Delta t]$ 时所存入的 $a\Delta t$ 美元，在 $t=0$ 时的价值是 $a\Delta t\cdot e^{-rt}=ae^{\ rt}\Delta t$．
由微元法可知，当 t 从 0 变到 T 时，$[0,T]$ 周期内均匀流在 $t=0$ 时的总价值可表示为

$$P=\int_0^T ae^{-rt}\mathrm{d}t=\frac{a}{r}\Big[-e^{-rt}\Big]_0^T=\frac{a}{r}(1-e^{-rT})$$

因此，15 年的租金在当前的价值为

$$P=\frac{600}{r}(1-e^{-15r})(\text{万美元})$$

当 $r=12\%$ 时

$$P=\frac{600}{0.12}(1-e^{-0.12\times 15})\approx 4173.5(\text{万美元})$$

比较可知，此时租用客机比购买客机合算．
当 $r=6\%$ 时，

$$P=\frac{600}{0.06}(1-e^{\ 0.06\times 15})\approx 5934.3(\text{万美元})$$

此时购买客机比租用客机合算．

思考题 1． 若将两种支付方式都化为 15 年之后的价值进行比较，应该如何进行计算？

提示： 购买飞机所支付的5000万美元，15年后的价值为 $P_1=5000\times e^{r\times 15}$；租飞机所付租金15年后的价值为 $P_2=\int_0^{15}600\times e^{r(15-t)}dt=\frac{600}{r}(e^{r\times 15}-1)$. 当 $r=12\%$ 时：$P_1=30\ 248$ 万美元，$P_2=25\ 248$ 万美元.

比较可知，此时租飞机比买飞机好. 当 $r=6\%$ 时：$P_1=12\ 298$ 万美元，$P_2=14\ 596$ 万美元.

比较可知，此时买飞机比租飞机好.

思考题 2. 买飞机共支付5000万美元，租飞机15年的租金为 $600\times 15=9000$ 万美元，所以买飞机必然比租飞机合算. 这种想法对吗？（不对，因为没有考虑利率对货币价值的影响.）

参考文献： [70], p. 16.

68、你会计算绕斜轴旋转而成的立体的体积吗

在高等数学中，平面图形绕 x 轴或 y 轴旋转所成立体的体积如何计算早已解决. 但对平面图形绕任一直线 $y=kx+b(k\neq 0)$ 旋转所成立体的体积如何计算却没有讨论. 这是一个较复杂的问题. 对于该问题，按通常的想法应当是：先平移、旋转坐标轴，求出曲线在新坐标系下的方程，再绕新轴旋转去求体积. 但这样做一般是十分困难的. 能否就用课本上介绍的元素法去推导出一个普遍适用的公式呢？答案是肯定的，下面的定理较好地解决了这一难题.

定理： 设函数 $y=f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上有连续导数，那么由曲线 $y=f(x)$ 及直线 $y=kx+b(k\neq 0)$、$y=-\frac{1}{k}x+b_1$、$y=-\frac{1}{k}x$

$+b_2(b_1<b_2)$所围曲边梯形 D(见图 68－1)绕直线 $y=kx+b$ 旋转所成立体的体积为

$$V=\frac{\pi}{(1+k^2)^{3/2}}\int_{x_1}^{x_2}[f(x)-kx-b]^2\cdot|1+kf'(x)|\mathrm{d}x \quad (1)$$

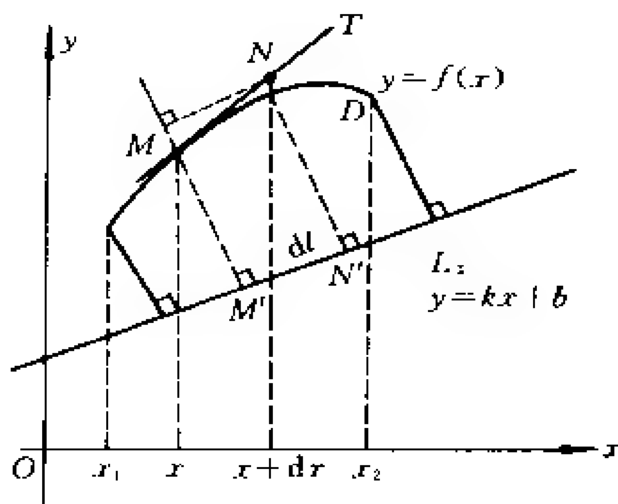


图 68－1　曲边梯形 D 绕直线 $y=kx+b$ 旋转示意图

证： 如图 68－1 所示，设 $M(x,y)$为曲线 $y=f(x)$上任一点，曲线在 M 点处的切线为

$$MT:Y=f(x)+f'(x)(X-x)$$

过 M 点作直线 $L:y=kx+b$ 的垂线为

$$MM':\overline{Y}=-\frac{1}{k}(\overline{X}-x)+f(x)$$

即
$$\overline{X}+k\overline{Y}-[x+kf(x)]=0$$

应用定积分的元素法，考虑子区间$[x,x+\mathrm{d}x]$. 设相应于$[x,x+\mathrm{d}x]$的曲线弧段在直线 L 上的投影长为 $\mathrm{d}l$，则当子区间的长充分小时，取切线 MT 上对应于右端点 $x+\mathrm{d}x$ 的点 $N(x+\mathrm{d}x,f(x)+f'(x)\mathrm{d}x)$到垂线 MM'的距离为 $\mathrm{d}l$，则

$$\mathrm{d}l=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}|(x+\mathrm{d}x)+k[f(x)+f'(x)\mathrm{d}x]$$

$$-[x+kf(x)]|$$

$$=\frac{|1+kf'(x)|}{\sqrt{1+k^2}}\mathrm{d}x（在此不妨假设\ \mathrm{d}x>0）$$

而 M 点到直线 L 的距离为

$$d=\frac{|f(x)-kx-b|}{\sqrt{1+k^2}}$$

从而得

$$\mathrm{d}V=\pi d^2\cdot\mathrm{d}l=\pi\frac{[f(x)-kx-b]^2}{1+k^2}\cdot\frac{|1+kf'(x)|}{\sqrt{1+k^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{(1+k^2)^{3/2}}[f(x)-kx-b]^2|1+kf'(x)|\mathrm{d}x$$

所以曲边梯形 D 绕直线 $L:y=kx+b(k\neq0)$ 旋转所成立体的体积为

$$V=\frac{\pi}{(1+k^2)^{3/2}}\int_{x_1}^{x_2}[f(x)-kx-b]^2\cdot|1+kf'(x)|\mathrm{d}x$$

证毕.

注 公式(1)适用于曲边梯形 D 的边界与直线 L 的任一垂线只有一个交点的情况.若 D 的边界与 L 的垂线有多于一个的交点时,可通过对区域 D 的边界分段计算之.

下面看两个实例.

例 1 求直线 $y=2x$ 与 $y=x$、$x+y=3$ 和 $x+y=6$ 所围直角梯形绕直线 $y=x$ 旋转所成立体的体积.

解: 如图 68－2 所示,这里 $f(x)=2x,k=1,b=0,y=2x$ 与 $x+y=3$、$x+y=6$ 交点的横坐标分别为 1 和 2,即 $x_1=1,x_2=2$.由公式(1)立得

$$V=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_1^2(2x-x)^2(1+2)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{7\pi}{2\sqrt{2}}$$

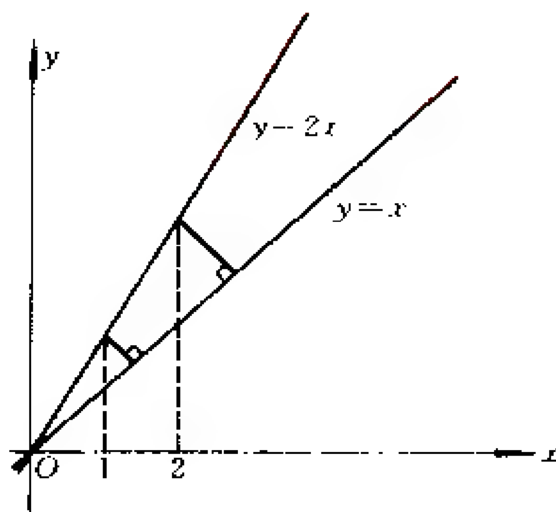


图 68－2　直角梯形绕 $y=x$ 旋转示意图

比用圆台的体积公式 $V=\frac{1}{3}\pi h(R_1^2+R_2^2+R_1R_2)$ 去计算容易了许多.

例 2　求由曲线 $y=-x^2-3x+6$ 和直线 $x+y-3=0$ 所围图形绕直线 $x+y-3=0$ 旋转所成立体的体积.

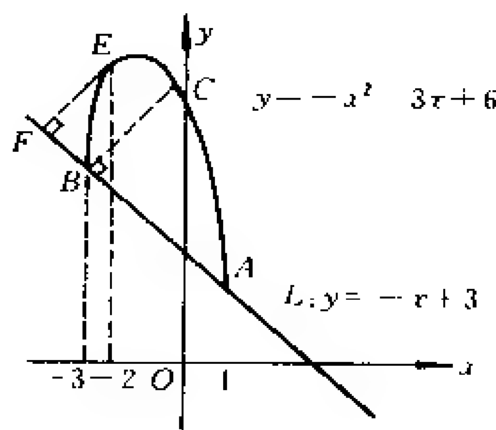


图 68－3　$y=-x^2-3x+6$ 与 $y=-x+3$ 所围区域

解： 如图 68－3 所示，曲线上切线垂直于直线 L 的点为 $E(-2,8)$，由于曲线 CEB 与 L 的垂线有多于一个的交点，故需分段计算 dV，换言之，所求旋转体的体积 V 等于 $ACEFA$ 所围图形绕 L 旋转所成立体的体积减去 $EFBE$ 所围图形绕 L 旋转所成立体的体积．即

$$\begin{aligned}
V &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_{-2}^{1}|x+2|(x^2+2x-3)^2\mathrm{d}x \\
&\quad -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_{-3}^{-2}|x+2|(x^2+2x-3)^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\Big[\int_{-2}^{1}(x+2)(x^2+2x-3)^2\mathrm{d}x \\
&\quad +\int_{-3}^{-2}(x+2)(x^2+2x-3)^2\mathrm{d}x\Big] \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_{-3}^{1}(x+2)(x^2+2x-3)^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{256\sqrt{2}}{15}\pi
\end{aligned}$$

思考题： 曲线 $y=x^m\ (m>0, m\neq 1)$ 与直线 $y=x$ 所围图形绕 $y=x$ 旋转所成立体的体积是多少？当 $m\to\infty$ 时体积的极限在几何上表示什么？

（答案：$V=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}+\frac{m-2}{m+2}-\frac{2m-1}{2m+1}\right)$；当 $m\to\infty$ 时体积的极限为 $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$，在几何上它表示直线 $y=x$，$x=1$，与 x 轴所围直角三角形绕斜边旋转所成立体的体积）．

参考文献： [19]，p.244～247；[71]，p.39～42．

所以

$$k=\frac{\lg 8/5}{\lg 25/64}=\frac{\lg 8/5}{-2\lg 8/5}=-\frac{1}{2}$$

将 $k=-\frac{1}{2}$代入(2)

$$c=10\times(64)^{1/2}=10\times 8=80$$

又,根据学习曲线,当 $x>A$ 时,$cA^k=8$. 将 $c=80,k=-1/2$ 代入可求出 $A=100$.

所以,学习曲线为

$$y=\begin{cases}80x^{-\frac{1}{2}}, & x\leqslant 100\\ 8, & x>100\end{cases}$$

下面计算达到熟练程度所需的时间 T. 由学习曲线知,当工人织完 100 匹布后即可成为熟练工人,因此 T 即为织 100 匹布所用的时间.

当工人织完 x 匹布后,再织 Δx 匹布所用的时间为

$$\Delta y=80x^{-\frac{1}{2}}\Delta x=\frac{80}{\sqrt{x}}\Delta x$$

根据微元法,织 100 匹布所用时间为

$$T=\int_0^{100}\frac{80}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=160\sqrt{x}\Big|_0^{100}=1600(\text{小时})$$

思考题: 按照上述学习曲线计算新工人织 200 匹布所用时间($T=\int_0^{200}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{100}\frac{80}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\int_{100}^{200}8\mathrm{d}x=1600+800$ $=2400(\mathrm{h})$.

参考文献: [70].

70、潜艇的观察窗问题

在探测海底的潜艇上装有若干个观察窗.为使窗户的设计更

所以

$$k=\frac{\lg 8/5}{\lg 25/64}=\frac{\lg 8/5}{-2\lg 8/5}=-\frac{1}{2}$$

将 $k=-\frac{1}{2}$ 代入(2)

$$c=10\times(64)^{1/2}=10\times 8=80$$

又，根据学习曲线，当 $x>A$ 时，$cA^k=8$. 将 $c=80,k=-1/2$ 代入可求出 $A=100$.

所以，学习曲线为

$$y=\begin{cases}80x^{-\frac{1}{2}}, & x\leqslant 100\\ 8, & x>100\end{cases}$$

下面计算达到熟练程度所需的时间 T. 由学习曲线知，当工人织完 100 匹布后即可成为熟练工人，因此 T 即为织 100 匹布所用的时间.

当工人织完 x 匹布后，再织 Δx 匹布所用的时间为

$$\Delta y=80x^{-\frac{1}{2}}\Delta x=\frac{80}{\sqrt{x}}\Delta x$$

根据微元法，织 100 匹布所用时间为

$$T=\int_0^{100}\frac{80}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=160\sqrt{x}\Big|_0^{100}=1600(\text{小时})$$

思考题： 按照上述学习曲线计算新工人织 200 匹布所用时间($T=\int_0^{200}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{100}\frac{80}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\int_{100}^{200}8\mathrm{d}x=1600+800$
$=2400(\mathrm{h})$.

参考文献： [70].

70、潜艇的观察窗问题

在探测海底的潜艇上装有若干个观察窗. 为使窗户的设计更

科学、更合理,必须先计算加在观察窗上的压力.如果我们假定窗户是垂直的,其形状如图 70 所示是对称的,试求出压力与窗户面积、窗户形心间的关系.

解: 从物理学知道,在水深 z 处的压强为

$$p=\gamma z$$

这里 γ 是海水的比重.建立如图 70 所示的坐标系,对应于$[z,z+\mathrm{d}z]$的窄条上各点处的压强近似等于 γz,这窄条的面积近似为 $\mathrm{d}A=2l(z)\mathrm{d}z$,故这窄条上所受的海水压力的近似值,即压力微元

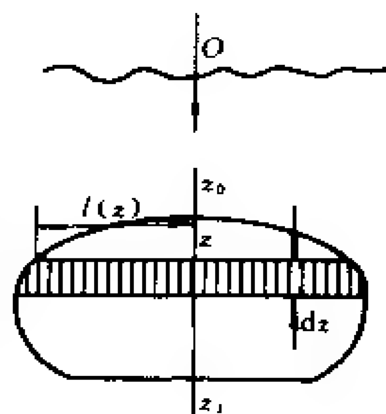


图 70 潜艇的观察窗

$$\mathrm{d}F=p\mathrm{d}A=2\gamma zl(z)\mathrm{d}z$$

因此,加在整个窗面上的压力为

$$F=\int_{z_0}^{z_1}\mathrm{d}F=2\gamma\int_{z_0}^{z_1}zl(z)\mathrm{d}z$$

因为

$$A=2\int_{z_0}^{z_1}l(z)\mathrm{d}z$$

形心

$$\bar{z}=\frac{2}{A}\int_{z_0}^{z_1}zl(z)\mathrm{d}z$$

因此

$$F=\gamma\bar{z}A$$

但 $\gamma\bar{z}$ 正好是深度为 $\bar{z}$ 处的水压强,所以加在窗户上的全部压力等于窗户露出的全部面积乘上它形心处的压强.作为一个具体的实例,设窗户是圆的(这是最可能的形状),其半径为 0.9144 米,取 $\gamma=1121.9767$ 千克/米^3,$\bar{z}=1828.2$ 米,则

$$\begin{aligned}F&=1121.9767\times\pi 0.9144^2\times1828.2\\&=37407.031(\mathrm{kg})\end{aligned}$$

参考文献: [3],p.335~336.

71、垂直金属杆的长度问题

一质地均匀横截面相等的金属杆垂直地立在地上，由于它本身重量的作用，长度会减小. 试求减少的数量.

解： 由材料抗力的基本公式知，若金属杆的横截面为 s，受的拉力或压缩力为 F，则单位面积受的力是

$$F^{\circ}=\frac{F}{s}$$

若 l 表示其长度，Δl 是长度的变化，则每一单位长度的延伸或压缩为

$$i=\frac{\Delta l}{l}$$

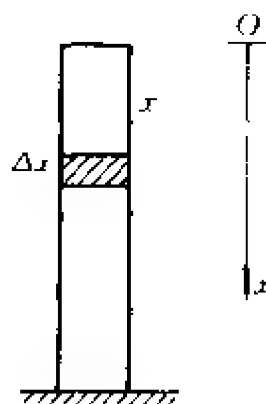


图 71 垂直金属杆的长度

虎克定律指出，单位力 F° 与 i 成正比(只要不超越弹性限度)：

$$F^{\circ}=Ei$$

这里 E 是弹性系数.

下面我们根据以上这些知识来计算金属杆长度的减少量.

建立如图 71 所示坐标系，并以 δ 表示体密度. 则与顶端相距 x、高度单元为 Δx 的小金属杆所受的力是

$$F=\delta sx$$

单位缩短量是

$$i=\frac{F^{\circ}}{E}=\frac{\delta sx/s}{E}=\frac{\delta x}{E}$$

因此，单元的高度变为

$$\Delta x-\Delta x\cdot\frac{\sqrt{x}}{E}=\Delta x\left(1-\frac{\sqrt{x}}{E}\right)$$

由积分得到金属杆的新高度 l'：

$$l' = \int_0^l \left(1 - \frac{\delta x}{E}\right) dx = l - \frac{\delta l^2}{2E}$$

$$= l - \frac{(\delta s l) l}{2Es} = l - \frac{pl}{2Es}$$

于是减少的高度为

$$l - l' = \frac{pl}{2Es}$$

懂得了垂直金属杆的长度会减少的道理,我们在桥梁、厂房等建筑施工中就会把减少的部分考虑进去,从而保证施工的质量.

参考文献: [4],p.182~183.

72、如何求物体加热所需的热量

已知在0℃至200℃的温度范围内铁的比热 c_t 与温度 t 的关系为线性关系,并通过实验测定当 $t=50$ 时,$c_t=0.1124$;当 $t=100$ 时,$c_t=0.1672$.现将温度为20℃的铁10千克加热到100℃,试求所需的热量 Q.

解: 由题意知,$c_t=a+bt$,又从数据

t	50	100
c_t	0.1124	0.1672

$$\text{有}\begin{cases} a+50b=0.1124 \\ a+100b=0.1672 \end{cases}$$

解线性方程组,得 $a=0.1053, b=0.000142$;

所以
$$c_t=0.1053+0.000142t \tag{1}$$

物体的比热是将单位质量的该物体温度升高1℃所需的热量.由实验表明,此热量随物体的温度改变而改变,如(1)式所示.

根据导数定义，知道

$$c_t=\frac{dQ}{dt},$$

所以，单位质量的物体从温度 t_1 升到 t_2 时，所需要的总热量为

$$Q=\int_{t_1}^{t_2}c_t\,dt \tag{2}$$

将 $t_1=20, t_2=100$ 及(1)式代入(2)式，得

$$\begin{aligned}Q&=\int_{20}^{100}(0.1053+0.000142t)dt\\&=\left[0.1053t+0.000071t^2\right]_{20}^{100}=9.106(\text{热量单位})\end{aligned}$$

对于 10 千克铁，所求的热量等于 91.06 热量单位.

参考文献： [32],p.58～59.

73、怎样计算气体流经喷嘴的最快速度

这个问题可以通过下面三个步骤加以解决：

(1) 首先建立气体流量 G 与喷嘴面积 f、气体压力 P 的函数关系.

解： 在一定的条件下，气体流经小孔时，其状态方程是

$$P_1V_1^n=PV^n=C(\text{常数}) \tag{1}$$

式中 P_1、V_1 和 P、V 分别代表过程开始和终了时的压力和容积，n 是大于 1 的常数.

气体流出时所作的 A 可由下列计算：

$$\begin{aligned}A&=\int_{V_1}^{V}PdV=\int_{V_1}^{V}CV^{-n}dV(\text{注意到 }P=CV^{-n})\\&=\frac{C}{1-n}V^{1-n}\Big|_{V_1}^{V}=\frac{C}{1-n}(V^{1-n}-V_1^{1-n})\end{aligned}$$

$$=\frac{P_1V_1^n}{n-1}(V_1^{1-n}-V^{1-n})\text{（注意到 }C=P_1V_1^n\text{）}$$

$$=\frac{P_1V_1}{n-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V}\right)^{n-1}\right]$$

$$=\frac{P_1V_1}{n-1}\left[1-\left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]\text{（注意到}\left(\frac{V_1}{V}\right)^{n-1}=\left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\text{）}$$

气体流出的能量由下式决定：

$$w=\frac{1}{2}m\omega^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{g}\cdot\omega^2$$

式中：$m=\frac{1}{g}$ 是 1 千克气体的质量，ω 是流出速度．由于 $w=A$，所以

$$\frac{P_1V_1}{n-1}\left[1-\left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]=\frac{\omega^2}{2g}$$

于是

$$\omega=\sqrt{\frac{2gP_1V_1}{n-1}\left[1-\left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]} \tag{2}$$

如小孔面积等于 f，那末每秒流过小孔的气体的量等于

$$G=f\omega\frac{1}{V}$$

式中 $\frac{1}{V}=\gamma$ 是气体的重度．

将(2)式代入上式，得

$$G=\frac{f}{V}\sqrt{\frac{2g}{n-1}P_1V_1\left[1-\left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

又由(1)式知 $V=\left(\frac{P_1}{P}\right)^{\frac{1}{n}}V_1$，代入上式，得

$$G=f\left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{1}{V_1}\sqrt{\frac{2g}{n-1}P_1V_1\left[1-\left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

$$=f\sqrt{\frac{2g}{n-1}\cdot\frac{P_1}{V_1}\left[\left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{2}{n}}-\left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]} \tag{3}$$

上式就是流量 G 与 f, P 之间的函数关系.

(2)当喷嘴面积为一定 $f=f_0$ 时,求具有最大流量 G 的相应压力 P_0 的值.

解: 从(3)式可知,只需考虑下列函数 $\varphi(P)$ 的最大值问题.

$$\varphi(P)=\left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{2}{n}}-\left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{n+1}{n}}$$

因为

$$\varphi'(P)=\frac{2}{nP_1}\left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{2}{n}-1}-\frac{n+1}{nP_1}\left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$=\left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{1}{n}}\left[\frac{2}{nP_1}\left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{1}{n}-1}-\frac{n+1}{nP_1}\right]$$

令 $\varphi'(P)=0$, 解得

$$\left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{1}{n}-1}=\frac{n+1}{2}, \frac{P}{P_1}=\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

即有驻点 $P=P_0=\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}}P_1$ (4)

由于

$$\varphi''(P_0)=\frac{-(n+1)^2(n-1)}{n^2P_1}<0$$

所以当 $P=P_0$ 时流量最大.

(3) 最后求气体流经喷嘴的最快速度.

解: 由上面解出的 P_0 称为临界压力,而 $\frac{P_0}{P_1}$ 称为临界压力比.和临界压力 P_0 相对应的速度 ω_0,可从公式(2)求得.将(4)式代入(2),有

$$\omega_0=\sqrt{\frac{2gP_1V_1}{n-1}\left[1-\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}}\right]}$$

$$=\sqrt{\frac{2gP_1V_1}{n+1}}$$

这个速度称为临界速度,它表示流经喷嘴所能得到的最快速度.

参考文献： [32],p.59~61.

74、天然气产量的预测

工程师们已经开始从墨西哥湾的一个新井开采天然气.根据初步的试验和已往的经验,他们预计天然气开采后的第 t 个月的月产量由下面的函数给出:

$$P(t)=0.0849te^{-0.02t}\text{（百万立方米）}$$

试估计前24个月的总产量.

解： 前24个月的总产量为

$$P=\sum_{k=1}^{24}0.0849ke^{-0.02k}$$

直接计算这个和式较难,应用定积分来估计它.

令 $f(t)=0.0849te^{-0.02t}$,$0\leqslant t\leqslant 24$

则 $P=\sum_{k=1}^{24}f(k)$,且 $f'(t)=0.0849e^{-0.02t}(1-0.02t)\geqslant 0$

从而 $f(t)$为递增函数.由定积分的性质有:

$$I_1=\int_0^{24}f(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{24}\int_{k-1}^{k}f(t)\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=1}^{24}f(k)=P$$

$$I_2=\int_1^{25}f(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{24}\int_{k}^{k+1}f(t)\mathrm{d}t\geqslant\sum_{k=1}^{24}f(k)=P$$

而 $I_1=\int_0^{24}0.0849te^{-0.02t}\mathrm{d}t$

$$=0.0849\int_0^{24}te^{-0.02t}\mathrm{d}t$$

$$=0.0849\left[-\frac{1}{0.02}te^{-0.02t}\Big|_0^{24}+\int_0^{24}\frac{1}{0.02}e^{-0.02t}\mathrm{d}t\right]$$

$$=0.0849\times 50\left[-te^{-0.02t}\Big|_0^{24}+\int_0^{24}e^{-0.02t}\mathrm{d}t\right]$$

$$=0.0849\times 50\left[-24e^{-0.48}-\frac{1}{0.02}e^{-0.02t}\Big|_0^{24}\right]$$

$$=0.0849\times 50\left[-24e^{-0.48}-50(e^{-0.48}-1)\right]$$

$$=0.0849\times 50[-74e^{-0.48}+50]$$

≈ 17.8716(百万立方米)

类似地,可得

$$I_2=\int_1^{25}0.0849te^{-0.02t}\,dt\approx 19.1039\text{(百万立方米)}$$

从而有

$$P\approx\frac{I_1+I_2}{2}=\frac{17.8716+19.1039}{2}=18.4878\text{(百万立方米)}$$

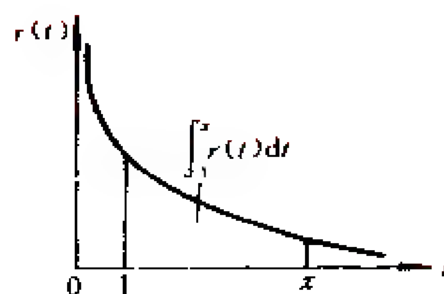
参考文献: [53],p.371~373.

75、终身供应润滑油所需的数量

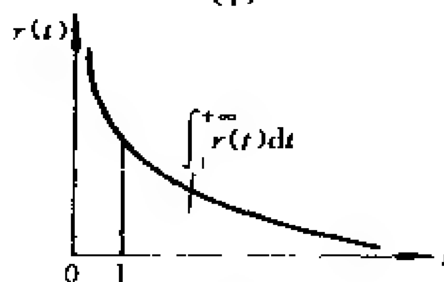
某制造公司在生产了一批超音速运输机之后停产了.但该公司承诺将为客户终身供应一种适于该机型的特殊润滑油.一年后该批飞机的用油率(单位:升/年)由下式给出:$r(t)=300/t^{3/2}$,其中 t 表示飞机服役的年数($t\geqslant 1$).该公司要一次性生产该批飞机一年以后所需的润滑油并在需要时分发出去,请问需要生产此润滑油多少升?

解: $r(t)$是该批飞机一年后的用油率,所以$\int_1^t r(t)dt$ 等于

第一年到第 x 年间该批飞机所用的润滑油的数量，那么 $\int_1^{+\infty} r(t)\mathrm{d}t$ 就等于该批飞机终身所需的润滑油的数量.



(1)



(2)

图 75 (1)从 $t=1$ 到 $t=x$ 曲线 $r(t)$ 下的面积(2)从 $t=1$ 到 $t=\infty$ 曲线 $r(t)$ 下的面积

$$\int_1^{+\infty} r(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{300}{t^{3/2}}\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\int_1^x 300t^{-3/2}\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 300(-2t^{-1/2})\Big|_1^x$$

$$= \lim_{x\to+\infty}[-600x^{-\frac{1}{2}}+600]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(600-\frac{600}{\sqrt{x}}\right) = 600(\mathrm{L})$$

即，600 升润滑油将保证终身供应.

参考文献： [45]，p. 288.

76、如何标出椭圆柱油罐中油量的刻度

现有一个椭圆柱油罐(如图 76－1)，其长度为 l，两底面是长轴为 $2a$，短轴为 $2b$ 的椭圆，问当油罐中油面高度为 h 时，油量是多少?

解： 从图 76－1 容易看出，问题在于计算油面与油罐底面相截出的那一块面积 s(带阴影部分)，只要算出 s，则罐中的油所占的体积 $v=sl$，从面油量 Q 为

$$Q=\rho v=\rho sl \tag{1}$$

式中 ρ 表示油的密度.

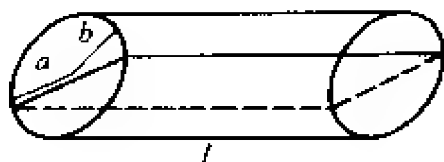


图 76－1

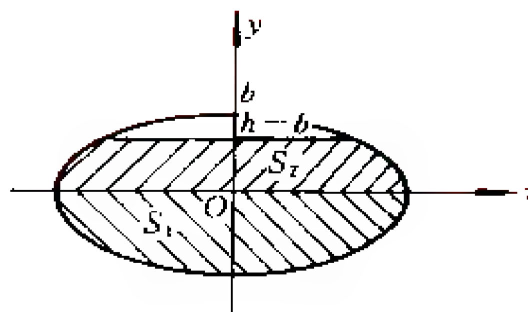


图 76－2

由图 76－2 知，油罐底面的椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

现设 $h>b$，则 $s=s_1+s_2$，其中 s_1 是半椭圆的面积，$s_1=\frac{1}{2}\pi ab$；s_2 是位于 x 轴上方阴影部分的面积.

如果把 y 看作自变量，则

$$s_2=2\int_0^{h-b}x(y)\mathrm{d}y=2\int_0^{h-b}a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}y$$

令　$y=b\sin t$，　则 $\mathrm{d}y=b\cos t\mathrm{d}t$，$\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}=\cos t$，

所以

$$\begin{aligned}s_2&=2ab\int_0^{\arcsin\frac{h-b}{b}}\cos^2 t\mathrm{d}t\\&=ab\int_0^{\arcsin\frac{h-b}{b}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t\\&=ab\left[\arcsin\frac{h-b}{b}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{h-b}{b}\right)\right]\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}s&=s_1+s_2\\&=ab\left[\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{h-b}{b}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{h-b}{b}\right)\right]\end{aligned}$$

所以由(1)知,油量

$$Q=\rho sl=ab\rho l\left[\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{h-b}{b}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{h-b}{b}\right)\right]$$

根据这个公式,可以求得油量与高度的对应值,从而可以标出油量的刻度.

思考题:如果 $h<b$,这时如何计量油量?

77、如何用比较简便的方法计算椭圆周长

我们熟知,半径为 r 的圆的周长为 $2\pi r$,现在设有椭圆 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0<b\leqslant a$.

(1) 如何计算椭圆的周长 s?

(2) 若以 $e=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}$ 表示椭圆的离心率,试证明对椭圆周长有如下近似公式

$$s\approx 2\pi a\left(1-\frac{e^2}{4}\right)$$

解: (1) 我们利用对弧长的曲线积分计算椭圆的周长.椭圆在第一象限的参数方程为

$$x=a\cos\theta, y=b\sin\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

于是,$x'_\theta=-a\sin\theta, y'_\theta=b\cos\theta$,椭圆的弧长元素为

$$\begin{aligned} ds &=\sqrt{x'^2_\theta+y'^2_\theta}\,d\theta=\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,d\theta \\ &=\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2\theta}\,d\theta=a\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\,d\theta \end{aligned}$$

椭圆在第一象限部分的长度为

$$s_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}ds=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\,d\theta$$

由对称性,椭圆周长 s 为第一象限部分的长度的 4 倍,即

$$s=4s_1=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\,d\theta$$

这就是计算椭圆周长的公式.

(2) 由于上式中被积函数$\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}$的原函数不是初等函数，上式不能直接积分得结果. 我们称$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\,d\theta$为完全椭圆积分.

下面我们用函数的幂级数展开式推导椭圆周长的近似公式，因为有熟知的幂级数展开式

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\cdots,\ -1\leqslant x\leqslant1$$

又因为$0\leqslant e<1$，从而$0\leqslant e\cos\theta<1\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，由上式得

$$\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\approx1-\frac{1}{2}e^2\cos^2\theta$$

所以有椭圆周长近似公式

$$\begin{aligned}s&\approx4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2}e^2\cos^2\theta\right)d\theta\\&=4a\cdot\left(1-\frac{1}{4}e^2\right)\cdot\frac{\pi}{2}\\&=2\pi a\left(1-\frac{1}{4}e^2\right)\end{aligned}$$

这就是所要证明的近似计算公式.

特别地，对于椭圆的特殊情形圆，$a=b$，$e=0$，由上面公式得$2\pi a\left(1-\frac{1}{4}\cdot0^2\right)=2\pi a$，准确等于圆周长.

思考题：在这个问题中，试用上述方法得出椭圆周长的幂级数展开式，并由此得出更精确的近似计算公式

$$\left(\text{答案：}s=2\pi a\left\{1-\frac{e^2}{4}-\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\right]^2\frac{k^{2n}}{2n-1}\right\}\right.$$

$$\left.\approx2\pi a\left(1-\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{64}e^4\right)\right).$$

参考文献： [61],p.280;[3],p.435~437.

78、地球环带的面积

地球上平行于赤道的线称为纬线，两条纬线之间的区域叫环带．假定地球是球形的，试证任何一个环带的面积都是 $S=\pi hd$，这里 h 是构成环带的两条纬线间的距离，d 是地球直径（约 13 000 公里）．

证：首先要弄清，两条纬线间的距离是指它们所在的两平行平面间的距离，而不是两纬线所夹经线的长度．建立如图 78 所示的坐标系，则环带可看作由曲线段

$$x=\sqrt{R^2-y^2}\,(c\leqslant y\leqslant c+h)$$

绕 y 轴旋转而成．由旋转体的侧面积公式

$$S_{侧}=\int_c^d 2\pi x(y)\sqrt{1+[x'(y)]^2}\,dy$$

可得环带面积为

$$S_{环}=\int_c^{c+h} 2\pi\sqrt{R^2-y^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-y^2}}\right)^2}\,dy$$

$$=\int_c^{c+h} 2\pi\sqrt{R^2-y^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\,dy$$

$$=2\pi Ry\Big|_c^{c+h}=2\pi Rh=\pi hd$$

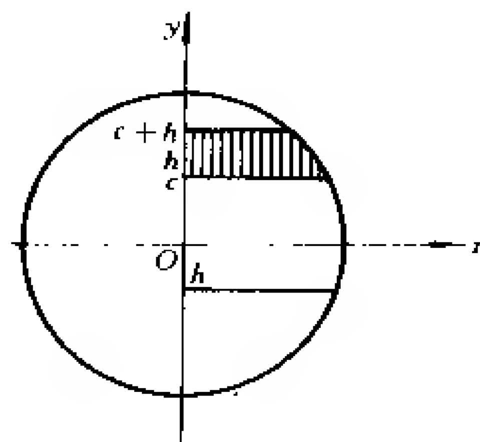


图 78 地球环带的面积与环带位置无关

注 1：由此可见，环带面积与环带在地球上的位置无关．也就是说，只要构成环带的两条纬线间的距离 h 相同，那么，靠近赤道的环带与位于北极的环带的面积都

是一样的(尽管纬线长度,夹在两纬线间的经线长度都不一样)(见图78).

注2: 关于旋转体的侧面积公式,同济大学编的《高等数学》一书中没有介绍,读者可参考清华大学编写的《高等数学》(基础部分)或其它任何一本理科"数学分析"教材.

参考文献: [1],p.450.

79、高尔夫球座的体积

一个木制高尔夫球座大体上具有以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象为边界的区域绕 Ox 轴旋转一周形成的立体.这里

$$g(x)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x\leqslant \frac{9}{2} \\ x-\frac{9}{2}, & \frac{9}{2}<x\leqslant 5 \end{cases} \quad (\text{单位为 cm})$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{2}<x\leqslant \frac{7}{2} \\ \frac{1}{4}\left[1+\left(x-\frac{7}{2}\right)^2\right], & \frac{7}{2}<x\leqslant \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{9}{2}<x\leqslant 5 \end{cases}$$

问这个高尔夫球座的体积是多少?

解:
$$V=\int_0^5 \pi f^2(x)\mathrm{d}x-\int_0^5 \pi g^2(x)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}x^2\mathrm{d}x\right.$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)^2 dx+\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}}\frac{1}{16}\left[1+\left(x-\frac{7}{2}\right)^2\right]^2 dx$$

$$+\int_{\frac{9}{2}}^{5}\frac{1}{4}dx\Big]-\pi\int_{\frac{9}{2}}^{5}\left(x-\frac{9}{2}\right)^2 dx$$

$$=\frac{191}{480}\pi(\text{cm}^3)$$

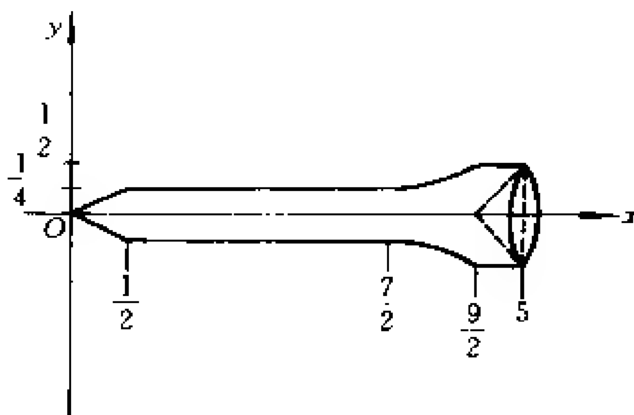


图 79　高尔夫球座

参考文献： [25],上册,p.593.

80、刚性棒的转动

一根长 4 米的刚性棒绕它自己的左端旋转,每分钟转 50 次,棒的密度是 $\rho(x)=(1+\sqrt{x})$kg/m,试求它的动能.

解： 见图 80.由于动能 $K=\frac{1}{2}I\omega^2$,其中 I 为转动惯量,角速度 $\omega=50(2\pi)=100\pi(\text{rad/min})$,所以只需求 I.今把区间[0,4] n 等分,如将每一个小区间近似地看成一个质点,那么第 i 个质点的质量近似地等于 $\rho(x_i)(x_i-x_{i-1})=(1+\sqrt{x_i})\Delta x$,于是它的转动惯量为

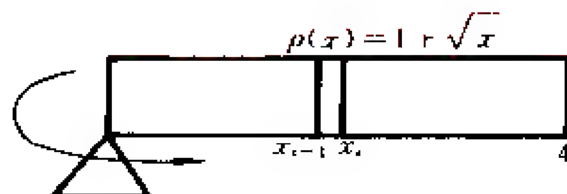


图 80　刚性棒的转动

$$\Delta I_i \approx m_i r_i^2 = [(1+\sqrt{x_i})\Delta x]x_i^2$$

从而
$$I \approx \sum_{i=1}^{n}(1+\sqrt{x_i})x_i^2\Delta x$$

令　$\Delta x \to 0$，我们得到

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}(1+\sqrt{x_i})x_i^2\Delta x \\ &= \int_0^4 (1+\sqrt{x})x^2\mathrm{d}x = \int_0^4 (x^2+x^{\frac{5}{2}})\mathrm{d}x = \frac{1216}{21}(\mathrm{kg\cdot m^2}) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\times\frac{1\,216}{21}\times(100\pi)^2 = \frac{6080000}{21}\pi^2 \\ &\approx 794(\mathrm{J}) \end{aligned}$$

参考文献：　[1]，上册，p.461～462.

81、桶在海水中所受的压力

一直径 2 米的圆桶横浸在海水中（0℃ 时海水的密度约为 1 030公斤/米^3），桶底中心距水面 4 米，试计算整个桶底所受水的压力.

解：　桶底画于图 81 中. 置坐标原点于桶底中心. 如图划分 y－轴，则第 i 条所受力为

$$\Delta F_i = P_i A_i$$

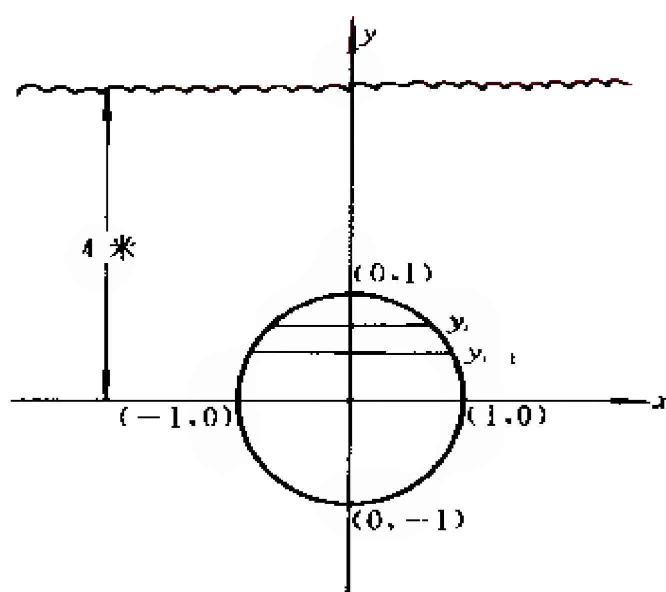


图 81　海水中的桶底

其中 P_i 为压强，A_i 为第 i 条的面积，故 $\Delta F_i \approx \rho d_i A_i$，已知 $\rho =$ 1 030公斤/米^3(海水密度). $d_i \approx 4 - y_i$(第 i 条在水下的深度)，$A_i \approx$(第 i 条长)$\times \Delta y$. 由于圆形桶底的方程是 $x^2+y^2=1$，所以在 y − 轴右侧 $x=\sqrt{1-y^2}$，在 y − 轴左侧 $x=-\sqrt{1-y^2}$，这样第 i 条的长就近似地等于$\sqrt{1-y_i^2}-(-\sqrt{1-y_i^2})=2\sqrt{1-y_i^2}$，从而

$$\Delta F_i \approx 2\rho(4-y_i)\sqrt{1-y_i^2}\,\Delta y$$

求和取极限

$$F=\int_{-1}^{1}2\rho(4-y)\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$=8\rho\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy-2\rho\int_{-1}^{1}y\sqrt{1-y^2}\,dy$$

上面第一个积分是半圆 $x=\sqrt{1-y^2}$ 的面积，等于 $\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{1}{2}\pi$. 第二个积分 $=0$(被积函数是奇函数). 于是我们得到

$$F=8\rho\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)=4\pi\rho=4\ 120\pi\approx 12\ 937(\mathrm{kg})$$

$$=12.937(\mathrm{t})$$

参考文献：[1]，上册，p.468.

82、大气压强问题

在大气下部(对流层)温度 T 是不均匀的．若温度可由 $T=T_0-ay$ 近似地表示(T_0 是地表温度，系数 a 为温度递减率)，试研究压强随高度变化的规律．

解： 记高度 y 处的大气压强为 $P(y)$，则它等于 y 上方的气体作用在 y 处每单位面积上的重力．设在 y 上方一个截面积为 A 的圆柱体内(图82)气体的质量为 M，则其重量为 Mg(g 为重力加速度)．这时圆柱底面(高度 y 处)的压强为

$$P(y)=\frac{Mg}{A}$$

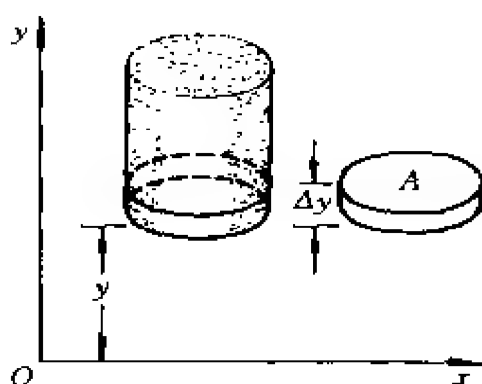


图 82　压强随高度在变化

设在稍许大一些的高度 $y+\Delta y$ 处大气压强为 $P(y+\Delta y)$．在距离为 Δy 的范围内，圆柱片所含体积为 $A\Delta y$，占有这个空间的气体重量为 $A\Delta y\rho g$($\rho=\rho(y)$为 y 处的大气密度)，显然，这个重量应等于两个大圆柱内气体重量之差，即

$$\rho gA\Delta y=A\rho(y)-A\rho(y+\Delta y)$$

或

$$\frac{\rho(y+\Delta y)-\rho(y)}{\Delta y}=-\rho g$$

令　$\Delta y\to 0$，则有

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}y}=-\rho(y)g \tag{1}$$

由气态方程知，$PV=\frac{M}{\mu}RT$(μ 表示气体的摩尔质量，R 为常数)，

则大气密度

$$\rho=\frac{M}{V}=\frac{\mu}{RT}P \tag{2}$$

将(2)代入(1),得

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=-\frac{\mu g}{RT}P$$

或

$$-\frac{\mathrm{d}P}{P}=\frac{\mu g}{RT}\mathrm{d}y=\frac{\mu g}{R(T_0-ay)}\mathrm{d}y$$

当高度由地表面(设为零)变为 y 时,大气压强由 P_0 变到 P. 由于 y 及 P 均视为变量,故属变上限的定积分. 代入相应的积分限,积分后得

$$-\int_{P_0}^{P}\frac{1}{P}\mathrm{d}P=\int_0^y\frac{\mu g}{R(T_0-ay)}\mathrm{d}y$$

$$\ln\frac{P_0}{P}=\frac{\mu g}{Ra}\ln\frac{T_0}{T_0-ay} \tag{3}$$

(3)式就是压强 P 随高度 y 变化的关系式(若写成显式形式,则有 $P=P_0\left(\frac{T_0}{T_0-ay}\right)^{-\frac{\mu g}{Ra}}$).

参考文献: [13],p.133;[6],p.22~24.

83、转售机器的最佳时间

由于折旧等因素,某机器转售价格 $R(t)$是时间 t(周)的减函数 $R(t)=\frac{3A}{4}\cdot e^{-\frac{t}{96}}$(元),其中 A 是机器的最初价格. 在任何时间 t,机器开动就能产生 $P=\frac{A}{4}e^{-\frac{t}{48}}$的利润. 问机器使用了多长时间后转售出去能使总利润最大? 这利润是多少? 机器卖了多少钱?

解: 假设机器使用了 x 周后出售,此时的售价是 $R(x)=$

$\frac{3A}{4}e^{-\frac{x}{96}}$，在这段时间内机器创造的利润是 $\int_0^x \frac{A}{4}e^{-\frac{t}{48}}dt$．于是，问题就成了求总收入

$$f(x)=\frac{3A}{4}e^{-\frac{x}{96}}+\int_0^x \frac{A}{4}e^{-\frac{t}{48}}dt,\qquad x\in(0,+\infty)$$

的最大值．

由
$$f'(x)=\frac{3A}{4}\cdot e^{-\frac{x}{96}}\cdot\left(-\frac{1}{96}\right)+\frac{A}{4}\cdot e^{-\frac{x}{48}}$$
$$=0$$

求得 $e^{-\frac{x}{96}}=\frac{1}{32}$，$e^{\frac{x}{96}}=32\quad x=96\ln 32$

当 $x\in(0,96\ln 32)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(96\ln 32,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$．又 $96\ln 32$ 是 $f(x)$ 的唯一极值点，∴它是最大值点，$x\doteq 333$ 周，此时

$$f(333)=\frac{3A}{4}e^{-\ln 32}+\frac{A}{4}\int_0^{96\ln 32}e^{-\frac{t}{48}}dt\approx 12.01A(\text{元})$$

总利润
$$P=f(333)-A=11.01A$$

机器卖了 $\frac{3A}{128}$ 元．

参考文献： [3]，上册，p.276.

84、力矩的功

如图 84 所示，外力 F 作用在刚体的 P 点，使刚体绕定轴转过一极小的角位移 $d\theta$，F 的作用点 P 的位移为 $ds=rd\theta$，位移 ds 的方向和 OP 垂直，即和力 F 成 θ 角．按照功的定义，力 F 在这段位移内所作的功为

$$\begin{aligned} dA &= F\cos\theta\cdot ds \\ &= F\cos\theta\cdot rd\theta \end{aligned}$$

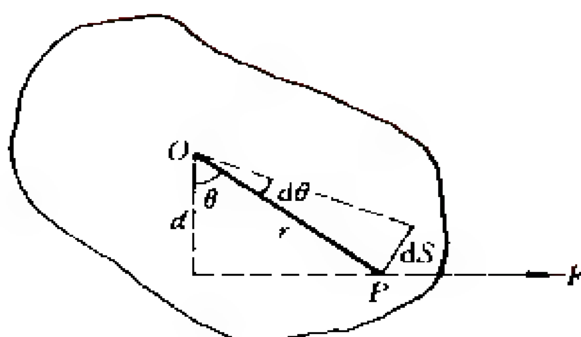


图 84 外力 F 作用于刚体的 P 点

因为 F 对转轴的力矩为

$$M = F \cdot d = Fr\cos\theta$$

因此

$$dA = Md\theta \tag{1}$$

上式为力矩 M 在一微小角位移 $d\theta$ 上所作的功的微分.

在一般情况下,力矩 M 的大小随角位移 θ 而变化,所以力矩 M 在一段有限大小的角位移上所作的功需用积分来计算,即

$$A = \int Md\theta \tag{2}$$

知道了力矩 M 随角位移 θ 的变化关系,就可根据上式求出力矩的功.

下面请看一具体实例.

时钟上发条时,所用的力与转角 θ 的关系是 $F = k\theta$,k 为比例常数,发条从松弛到上紧需要转几周,问作功多少? 设转轮的半径为 R.

解: 力矩 M 在微小角位移 $d\theta$ 上所作的功的微分为:

$$dA = Md\theta$$
$$= FRd\theta = k\theta Rd\theta$$

当发条从松弛到上紧转几周时,总共转过角位移为 $2\pi n$ 弧度.因此力矩所作的功为

$$A = \int Md\theta$$

$$= \int_0^{2\pi n} kR\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= kR \frac{(2\pi n)^2}{2}$$

$$= 2kR\pi^2 n^2$$

参考文献： [42],p.74－75.

85、人口统计模型

人口统计模型Ⅰ：

某城市1990年的人口密度近似为 $P(r)=\dfrac{4}{r^2+20}$. $P(r)$ 表示距市中心 r 公里区域内的人口数，单位为每平方公里10万人.(1)试求距市中心2km区域内的人口数.(2)若人口密度近似为 $P(r)=1.2e^{-0.2r}$ 单位不变，试求距市中心2km区域内的人口数.

解： 假设我们从城市中心画一条放射线，把这条线上从0到2之间分成 n 个小区间，每个小区间的长度为 Δr. 每个小区间确定了一个环，如图85所示.

让我们估算每个环中的人口数并把它们相加，就得到了总人口数. 第 j 个环的面积为：

$$\begin{aligned}\pi r_j^2-\pi r_{j-1}^2 &= \pi r_j^2-\pi(r_j-\Delta r)^2\\ &= \pi r_j^2-\pi[r_j^2-2r_j\Delta r+(\Delta r)^2]\\ &= 2\pi r_j\Delta r-\pi(\Delta r)^2\end{aligned}$$

当 n 很大时，Δr 很小，$\pi(\Delta r)^2$ 相对于 $2\pi r_j\Delta r$ 来说很小，可忽略不计，所以此环的面积近似为 $2\pi r_j\Delta r$.

在第 j 个环内，人口密度可看成常数 $P(r_j)$ 所以此环内的人口数近似为：$P(r_j)\cdot 2\pi r_j\Delta r$.

距市中心2km区域内的人口数近似为：$\sum_{j=1}^{n} P(r_j)\cdot 2\pi r_j\Delta r$，

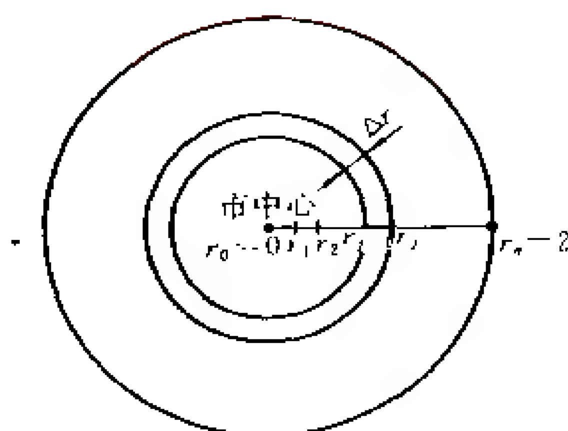


图 85　以市中心为圆心的同心圆环

即人口数 $N=\int_0^2 P(r)2\pi r\mathrm{d}r$.

(1) 当 $P(r)=\dfrac{4}{r^2+20}$时,

$$N=\int_0^2 2\pi\cdot\frac{4}{r^2+20}r\mathrm{d}r$$

$$=4\pi\int_0^2\frac{2r}{r^2+20}\mathrm{d}r=4\pi\ln(r^2+20)\Big|_0^2=4\pi\ln\frac{24}{20}\approx 2.291$$

(十万)

距市中心 2km 区域内的人口数大约为 229 100.

(2) 当 $P(r)=1.2\mathrm{e}^{-0.2r}$时,

$$N=\int_0^2 2.4\pi r\mathrm{e}^{-0.2r}\mathrm{d}r$$

$$=2.4\pi\int_0^2 r\mathrm{e}^{-0.2r}\mathrm{d}r=2.4\pi\frac{r\mathrm{e}^{-0.2r}}{-0.2}\Big|_0^2-2.4\pi\int_0^2\frac{\mathrm{e}^{-0.2r}}{-0.2}\mathrm{d}r$$

$$=-24\pi\mathrm{e}^{-0.4}+12\pi\left(\frac{\mathrm{e}^{-0.2r}}{-0.2}\right)\Big|_0^2$$

$$=-24\pi\mathrm{e}^{-0.4}+(-60\pi\mathrm{e}^{-0.4}+60\pi)\approx 11.602(\text{十万})$$

距市中心 2km 区域内的人口数大约为 1 160 200.

讨论: 本题中选取的两个人口密度 $P(r)=\dfrac{4}{r^2+20}$, $P(r)$

$=1.2e^{-0.2r}$有一个共同的性质$P'(r)<0$,即随着 r 的增大,$P(r)$减少.这是符合实际的,因为随着距市中心的距离越远,人口密度越小.另外,需要指出的是,当人口密度 $P(r)$选取不同的模式时,估算出的人口数可能会相差很大,因此,选择适当的人口密度模式对于准确地估算人口数至关重要.

人口统计模型Ⅱ:

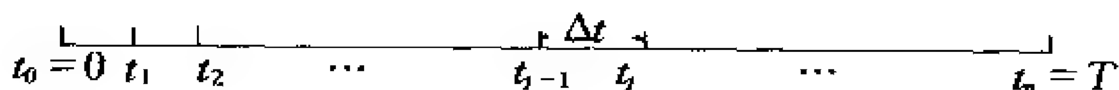
设 $P(t)$表示 t 时刻某城市的人口数.假设人口变化动力学受下列两条规则的影响.

1. t 时刻净增人口以每年$r(t)$的比率增加;

2. 在一段时期内,比如说从 T_1 到 T_2,由于死亡或迁移,T_1 时刻的人口数 $P(T_1)$的一部分在 T_2 时刻仍然存在,我们用 $h(T_2-T_1)P(T_1)$来表示,$0<h(T_2-T_1)<1$,T_2-T_1 是这段时间的长度.

试建立在任意时刻 t 人口规模的模型.

数学建模: 我们把$[0,T]$的时间区间分成 n 等分,每个小区间的长度为 Δt.



初始时刻的人口数为 $P(0)$,到时刻 T 将只剩下$h(T)P(0)$.当 Δt 很小时,从时刻 t_{j-1}到 t_j,净增人口的比率近似为常数 $r(t_j)$.这段时期净增的人口数近似为 $r(t_j)\Delta t$.t_j 时刻的人口到时刻 T 时只剩下$h(T-t_j)r(t_j)\Delta t$.所以在 T 时刻的总人数近似为:

$$h(T)P(0)+h(T-t_1)r(t_1)\Delta t+h(T-t_2)r(t_2)\Delta t+\cdots$$
$$+h(T-t_n)r(t_n)\Delta t\approx h(T)P(0)+\int_0^T h(T-t)r(t)\mathrm{d}t$$

当 n 无限增大时,$P(T)=h(T)P(0)+\int_0^T h(T-t)r(t)\mathrm{d}t$.

下面请看一具体实例.

设 $r(t)=5\times10^4+10^5t$，$h(t)=e^{-t/40}$，1990 年时该城市的人口数为 10^7，试求 2000 年时该城市的人口数.

解： $P(10)=h(10)P(0)+\int_0^{10}h(10-t)r(t)\mathrm{d}t$

$$=e^{-1/4}\times10^7+\int_0^{10}e^{-(10-t)/40}(5\times10^4+10^5t)\mathrm{d}t$$

$$=10^7e^{-1/4}+e^{-1/4}\left[5\times10^4\int_0^{10}e^{t/40}\mathrm{d}t+10^5\int_0^{10}te^{t/40}\mathrm{d}t\right]$$

$$=10^7e^{-1/4}+2\times10^6e^{-1/4}e^{t/40}\Big|_0^{10}+4\times10^6e^{-1/4}te^{t/40}\Big|_0^{10}$$

$$-16\times10^7e^{-1/4}e^{t/40}\Big|_0^{10}$$

$$=10^7e^{-1/4}+2\times10^6-2\times10^6e^{-1/4}+4\times10^7-16\times10^7$$

$$+16\times10^7e^{-1/4}$$

$$=2\times10^6(1-e^{-1/4})+10^7(17\times e^{-1/4}-12)$$

$$\approx1.28\times10^7$$

2000 年时该城市大约有人口 1 280 万.

参考文献： [45],p.262～263;[47],p.443～445.

86、牙弓形状的数学模型

在口腔矫形的临床实践中，确定治疗措施需要考虑牙弓的形状.人们对牙弓(形)曲线提出了各种数学模型，如椭圆、双曲线、抛物线和悬链线，其中模拟度较好的是悬链线(如图 86 所示).

悬链线的数学模型是 $f(x)=\frac{a}{2}(e^{bx}+e^{-bx})$，它的导数为

$$f'(x)=\frac{ab}{2}(e^{bx}-e^{-bx})$$

在这个模型中，矫形牙科医生感兴趣的是牙弓的长度.根据曲线弧

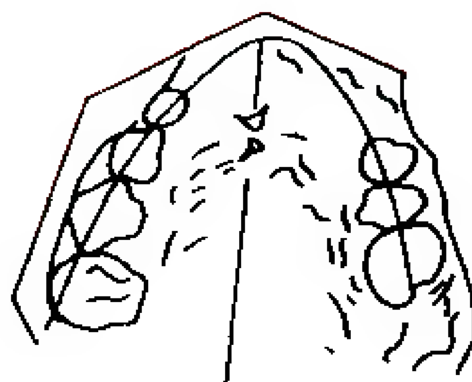


图 86 上颚牙型与悬链线

长的计算公式，牙弓的长度 L

$$= \int_a^b \{1 + [f'(x)]^2\}^{1/2} dx$$

$$= \int_a^b \left\{1 + \left[\frac{ab}{2}(e^{bx} - e^{-bx})\right]^2\right\}^{1/2} dx.$$

参数 a、b 可通过某些测量值来确定．在已知 a、b 的情况下，L 的积分值可用数值计算软件包在计算机上进行计算．

参考文献： [36]，p. 152.

87、单位时间内的血流量

将血管看成是一个圆柱形的管子，它的圆截面的半径为 R(cm)，管中的血流平行于血管的中心轴．距离中心轴 r 处血的流速为 $V = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)$(参阅例 130)．下面我们来计算单位时间内血管中的血流量 Q(cm^3/sec)．

解： 将上述血管的圆截面分成许多个圆环，每个圆环的宽度为 dr，如图 87－1 所示．小圆环的面积近似为 $2\pi r dr$．一秒钟内通过该圆环的血流量为 $V \cdot 2\pi r dr$．把一秒钟内通过所有这样的同心圆环上的血流量相加，则得：

$$Q = \int_0^R 2\pi V r dr$$

$$= 2\pi \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr$$

$$= \frac{\pi(P_1 - P_2)}{2\eta L}\left(\frac{R^2}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_0^R$$

$$= \frac{\pi(P_1 - P_2)}{8\eta L}R^4 \quad (cm^3/sec)$$

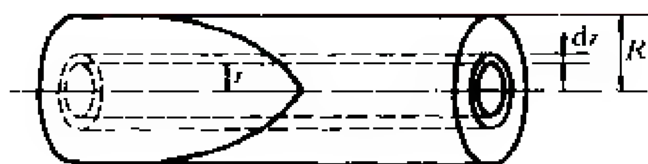


图 87-1 血管及层流示意图

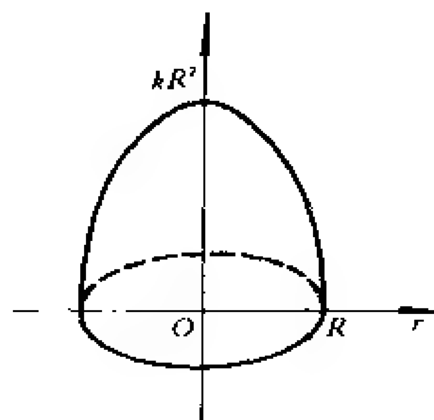


图 87-2 曲线 $V=k(R^2-r^2)$ 沿 V 轴旋转而成的旋转体

此式被称作泊萧叶(Poiseuille)公式

在本例中,我们实际要算的是曲线 V 沿血管的中心线旋转而成的旋转体的体积,如图 87-2 所示.此旋转体的体积等于单位时间内通过半径为 R 的血管中的血流量.

$V=\frac{P_1-P_2}{4\eta L}(R^2-r^2)$,$\frac{P_1-P_2}{4\eta L}$ 是常数,不妨设为 k,则 $V=k(R^2-r^2)$,所以 $r^2=R^2-\frac{V}{k}$.

$$
\begin{aligned}
\text{此旋转体的体积} &= \int_0^{kR^2}\pi r^2 \mathrm{d}V \\
&= \int_0^{kR^2}\pi\left(R^2-\frac{V}{k}\right)\mathrm{d}V \\
&= \pi\int_0^{kR^2}R^2\mathrm{d}V-\pi\int_0^{kR^2}\frac{V}{k}\mathrm{d}V \\
&= \pi R^2 V\Big|_0^{kR^2}-\frac{\pi}{2k}V^2\Big|_0^{kR^2} \\
&= k\pi R^4-\frac{k\pi}{2}R^4=\frac{k\pi}{2}R^4 \\
&= \frac{\pi(P_1-P_2)}{8\eta L}R^4=Q
\end{aligned}
$$

参考文献： [46],p.400.

88、心脏输出量的测定

小王想成为一名长距离游泳项目的运动员，为此，需要测定他的心脏每分钟输出的血量（简称心脏输出量）.使用的方法为“染色稀释法”；程序是先向离心脏较近的静脉注射一定量的染色，于是染色将随血液进入右心房、肺内血管、左心房、动脉，然后从动脉中定期取血样（如每隔1秒），并测定血样中含染色的浓度，由于血液的稀释，染色的浓度随时间 t（分钟）变化，从而可测得一个关于 t 的函数 $C(t)$(mg/L).设注射的染色的量为 D(mg)，试求：小王的心脏输出量 R(L/min).

解： 理解“染色稀释法”的原理，必须知道在小时间区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内通过取样点的染色量等于浓度 $C(t)$ 乘心脏输出量再乘小区间长度 $\mathrm{d}t$，即 $C(t)\cdot R\cdot \mathrm{d}t$.因为所有染色量最终要经过取样点，则染色总量应等于各小的时间区间内通过取样点染色量的和，由积分的定义知

$$D=\int_0^{T_0} C(t)R\,\mathrm{d}t=R\int_0^{T_0} C(t)\,\mathrm{d}t$$

其中 T_0 是全部染色通过取样点的时间.

则，心脏输出量为

$$R=\frac{D}{\int_0^{T_0} C(t)\,\mathrm{d}t}$$

思考题： 给小王静脉注射 5.0mg 染色，用一监测仪测量每秒钟动脉中所含染色的浓度.所得结果为

$$C(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant 2\\ -0.05(t^2-22t+40), & 2<t<20\end{cases}$$

$T_0=20$ 秒,求小王的心脏输出量(0.102L/s),

参考文献: [53],p.332~334.

89、呼出或吸入空气的速率

当你呼吸时,你呼出或吸入的气流的速率 $V(t)$(升/秒)可用一个正弦曲线来描述:

$$V(t)=A\sin(\frac{2\pi}{T}t)$$

其中时间 t(单位为秒)从某次吸气开始时计算起,A 是最大的气流速率,T 为一次呼吸所需的时间.当正弦曲线的函数值为正时,你正在吸气;反之,你正在呼气.在你吸气的某个时间段$[t_1,t_2]$上,曲线 $y=V(t)$ 与 $t=t_1,t=t_2$ 及 t 轴所围成的面积就是你在这个时间段上吸入空气的总量.对于呼气也有类似结论.试求你每次吸气时吸入空气的总量及每小时吸入空气的总量.

解: 每次吸气所用时间为 $\frac{T}{2}$,由 $V(t)$的周期性,只需考虑$[0,\frac{T}{2})$时间段上吸入的空气总量即可.每次吸气时吸入空气总量

$$=\int_0^{\frac{T}{2}}A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

$$=A\left[-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}$$

$$=A\left[-\frac{T}{2\pi}\cos\pi+\frac{T}{2\pi}\right]$$

$$=\frac{AT}{\pi}(\mathrm{L})$$

每小时吸入空气的总量

=每次吸气时吸入空气总量与1小时内的呼吸次数之积

$$=\frac{AT}{\pi}\times\frac{3\ 600}{T}$$

$$=\frac{3\ 600A}{\pi}(\mathrm{L})$$

思考题： 如果一个运动员休息时的最大气流速率 $A=0.80$ 升/秒，一次呼吸所需时间为 $T=8$ 秒，求这个人每次吸气时吸入空气总量及每小时吸入空气总量(2.037L，916.7L).

参考文献： [53]，p.623－624.

90、估计某医院在某时间内的就医人数

一家新的乡村精神病诊所刚开张．对同类门诊部的统计表明，总有一部分病人第一次来过之后还要来此治疗．如果现在有 A 个病人第一次来这就诊，则 t 个月后，这些病人中还有 $A\cdot f(t)$ 个病人还在此治疗，这里 $f(t)=e^{-t/20}$．现设这个诊所最开始时接受了 300 人的治疗，并且计划从现在开始每月接收 10 名新病人．试估算从现在开始 15 个月后，在此诊所接受治疗的病人有多少？

解： 既然 $f(15)$是 15 个月后还要来此就诊的病人人数的比例系数，那么在开张时接受的 300 人中有 $300f(15)$个人从现在开始的 15 个月后还将要在此就诊．

为了计算从现在开始的 15 个月内新接受的病人在 15 个月后还在此就诊的人数，将 15 个月的区间 $t\in[0,15]$，分为 n 个等距为 Δt 的小区间，令 t_j 表示第 j 个小区间的左端点 $\left(\frac{15}{n}j\right)$．既然每月要接收 10 名新病人，于是在第 j 个小区间内接收的新病人人数为 $10\Delta t$，于是 $10\Delta tf(15-t_j)$个病人将从 t_j 开始，$15-t_j$ 个月后还要来此就诊．所以从现在开始 15 个月后新接受的病人还要再次治疗的人数总和为：

$$\sum_{i=1}^{n} 10f(15-t_i)\Delta t$$

所以令 P 为开张 15 个月后在此就诊病人总数：

$$P \approx 300f(15) + \sum_{i=1}^{n} 10f(15-t_i)\Delta t$$

当 n 增加，取极限后可得

$$P = 300f(15) + \int_0^{15} 10f(15-t)\mathrm{d}t$$

因为 $f(t)=\mathrm{e}^{-t/20}$，所以

$$\begin{aligned} P &= 300\mathrm{e}^{-3/4} + 10\mathrm{e}^{-3/4}\int_0^{15} \mathrm{e}^{t/20}\mathrm{d}t \\ &= 247.24 \end{aligned}$$

所以，15 个月后，这个诊所将要接待 247 名左右病人.

参考文献： [51]，p.289～291.

91、捕鱼成本的计算

在鱼塘中捕鱼时，鱼越少捕鱼越困难，捕捞的成本也就越高，一般可以假设每公斤鱼的捕捞成本与当时池塘中的鱼量成反比.

假设当鱼塘中有 x 公斤鱼时，每公斤的捕捞成本是 $\dfrac{2000}{10+x}$ 元. 已知鱼塘中现有鱼 10 000 公斤，问从鱼塘中捕捞 6 000 公斤鱼需花费多少成本？

解： 根据题意，当塘中鱼量为 x 时，捕捞成本函数为

$$C(x) = \frac{2\,000}{10+x} \quad (x>0).$$

假设塘中现有鱼量为 A，需要捕捞的鱼量为 T. 当我们已经捕捞了 x 公斤鱼之后，塘中所剩的鱼量为 $A-x$，此时再捕捞 Δx 公斤鱼所需的成本为

$$\Delta C = C(x)\Delta x = \frac{2\ 000}{10 + (A - x)}\Delta x.$$

因此，捕捞 T 公斤鱼所需成本为

$$C = \int_0^T \frac{2\ 000}{10 + (A - x)}\mathrm{d}x = -2\ 000\ln\left[10 + (A - x)\right]_{x=0}^{x=T}$$

$$= 2\ 000\ln\frac{10 + A}{10 + (A - T)} \quad (\text{元})$$

将已知数据 $A = 10\ 000\text{kg}$，$T = 6\ 000\text{kg}$ 代入，可计算出总捕捞成本为

$$C = 2\ 000\ln\frac{10\ 010}{4\ 010} = 1829.59(\text{元})$$

顺便可以计算出每公斤鱼的平均捕捞成本

$$\bar{C} = \frac{1829.59}{6\ 000} \approx 0.30\ \text{元}$$

思考题： 分别就鱼塘中的鱼量为 5 000，2 000，1 000，500kg 几种情况，计算捕捞 10kg 鱼的捕捞成本.

（ $A = 5\ 000$ 时 $C = 4.00$ 元

$A = 2\ 000$ 时 $C = 9.98$ 元

$A = 1\ 000$ 时 $C = 19.90$ 元

$A = 500$ 时 $C = 39.61$ 元 ）

参考文献： [54].

92、怎样计算均匀货币流的价值

将 A 元现金存入银行，年利率按 r 计算，若以连续计息方式结算，t 年后的存款额为

$$a(t) = Ae^{rt}$$

因此，A 元现金 T 年之后的价值是 Ae^{rT}，称 Ae^{rT} 为 A 元现金 T 年之后的期末价值. 反过来，现在的 A 元现金相当于 T 年之前把

Ae^{-rT}元现金存入银行所得，故现在的 A 元现金 T 年前的价值是 Ae^{-rT}，称 Ae^{-rT} 是 T 年前的贴现价值.

在银行业务中有一种“均匀流”存款方式——使货币像水流一样以定常流量 a 源源不断地流进银行，比如商店每天把固定数量的营业额存入银行，就类似于这种方式.

设从 $t=0$ 时开始以均匀流方式向银行存款，年流量为 a 元，年利率为 r（连续计息结算），试问 T 年之后在银行有多少存款（期末价值）？这些存款相当于初始时的多少元现金（贴现价值）？

解： 根据连续计息结算方式可知，向银行存入 A 元，T 年之后的存款额为 Ae^{rT}.

现对均匀货币流采用微元法计算：

在$[t,t+\Delta t]$内向银行存入 $a\Delta t$ 元，T 年后这些存款的存期是 $T-t$，相应的存款额变为

$$a\Delta t e^{r(T-t)}=ae^{r(T-t)}\Delta t$$

因此，T 年后均匀货币流的总存款额为

$$F=\int_0^T ae^{r(T-t)}\mathrm{d}t=\frac{a}{r}\left[-e^{r(T-t)}\right]_0^T$$

$$=\frac{a}{r}(e^{rT}-1) \tag{1}$$

这就是均匀货币流的期末价值.

这 F 元现金相当于初始时的 Fe^{-rT}元，故

$$P=Fe^{-rT}=\frac{a}{r}(e^{rT}-1)e^{-rT}=\frac{a}{r}(1-e^{-rT}) \tag{2}$$

这就是均匀货币流的贴现价值.

思考题： 航通公司一次投资 100 万元建造一条生产流水线，并于一年后建成投产，开始取得经济效益. 设流水线的收益是均匀货币流，年流量为 30 万元. 已知银行年利率为 10%，问多少年后该公司可以收回投资？

提示： 设 $x+1$ 年后可以收回投资，此时流水线共运行了 x 年，依公式(1)可计算出 x 年中流水线的总效益为

$$A(x)=\frac{a}{r}(e^{rx}-1)=\frac{30}{0.1}(e^{0.1x}-1)\quad (万元)$$

这 $A(x)$ 万元在 $x+1$ 年之前(即开始投资时)的价值为

$$B(x)=A(x)e^{-r(x+1)}=\frac{30}{0.1}(e^{0.1x}-1)e^{-0.1x}\cdot e^{-0.1}$$

$$=300e^{-0.1}(1-e^{-0.1x})\quad (万元)$$

因此,当 $B(x)=100$ 万元时恰好收回投资.即

$$300e^{-0.1}(1-e^{-0.1x})=100$$

解方程,得

$$x=10\ln\frac{3}{3-e^{0.1}}\approx 4.6 \text{ 年}$$

所以,5.6 年后该公司可以收回全部投资.

参考文献: [70].

93、最大利润问题

在例 19 中,我们曾介绍过边际经济量这个经济学中的重要概念.比如,边际成本 MC、边际收益 MR,它们分别表示总成本 $C=C(q)$、总收益 $R=R(q)$ 对产量(销售量)q 的导数.现在的问题是,如果已知边际收益 MR、边际成本 MC、固定成本 C_0 及获得最大利润的生产水平 q,如何求最大利润? 下面就来讨论它.

分析: 一般说来,边际利润$(MR-MC)$是产出量 q 的函数,而边际利润的积累自然就是总利润.这样,最大利润就可视为不均匀地分布在产出区间$[0,q_0]$上的一个确定的量,因而这是个定积分问题.我们用"元素法"来推导它.

在区间$[0,q_0]$上任选一个小的产量区间$[q,q+dq]$,在产量由 q 增到 $q+dq$ 这一段生产过程中,所获利润的微元是

$$dL=(MR-MC)dq$$

在$[0,q_0]$上将这些"微利润"无限相加,就得

$$L=\int_0^{q_0}(MR-MC)\mathrm{d}q$$

这是最大毛利润,为了得到最大净利润,需要从毛利润中扣除固定成本,因而计算最大净利润的公式是

$$L_{净}=\int_0^{q_0}(MR-MC)\mathrm{d}q-C_0 \tag{1}$$

下面看一个实例.

例 1 设生产某种产品的固定成本为 50,边际成本和边际收益分别为

$$MC=q^2-14q+111, MR=100-2q$$

试确定厂商的最大利润.

解: 先要确定获得最大利润的产量是多少.因利润函数$L(q)=R(q)-C(q)$,故得极值存在的必要条件为$R'(q)=C'(q)$,即$MR=MC$,亦即

$$100-2q=q^2-14q+111$$

整理,得

$$q^2-12q+11=0$$

解此方程,得

$$q_1=1, q_2=11$$

又,本问题中极值存在的充分条件为

$$\frac{\mathrm{d}(MR-MC)}{\mathrm{d}q}<0,即\frac{\mathrm{d}(MR)}{\mathrm{d}q}<\frac{\mathrm{d}(MC)}{\mathrm{d}q}$$

现

$$\frac{\mathrm{d}(MR)}{\mathrm{d}q}=-2,\quad \frac{\mathrm{d}(MC)}{\mathrm{d}q}=2q-14$$

显然,$q_2=11$才满足此充分条件,即获得最大利润的产量为$q_0=11$.

将$q_0=11$及已知的MC、MR、C_0代入公式(1),得最大净利润为

$$L_{净}=\int_0^{11}[(100-2q)-(q^2-14q+111)]\mathrm{d}q-50$$

$$= \int_0^{11} (-q^2 + 12q - 11)\mathrm{d}q - 50 = \frac{484}{3} - 50$$

$$= 111\frac{1}{3}$$

在图 93 中，EDB 面积与 AEF 面积之差是最大毛利润$\frac{484}{3}$.

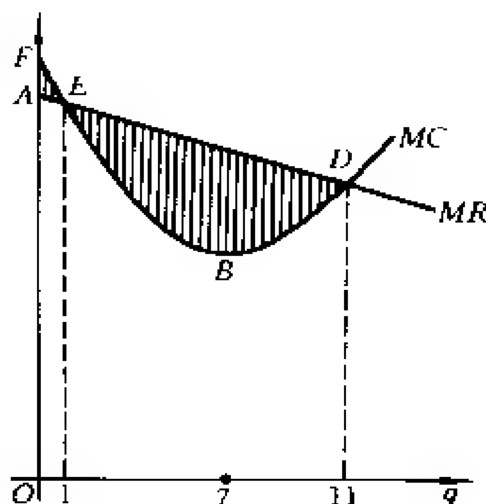


图 93　最大毛利润为 EDB 面积与 AEF 面积之差

参考文献： [8],p.339~341;[7],p.191~195.

94、消费者剩余与生产者剩余问题

"需求"是指在一定价格条件下，消费者愿意购买并且有支付能力购买的商品量.

消费者对某种商品的需求是多种因素决定的，其中商品的价格是影响需求的一个主要因素. 现在我们不考虑价格以外的其它因素(把诸如消费者收入的增减，其它代用品的价格等因素对需求的影响看作不变)，只研究需求与价格的关系(在例 23 中我们已经知道，若用 P 表示商品价格，Q 表示需求量，则 $Q=f(P)$就叫做需求函数).

一般说来，商品价格低，需求就大；反之，商品价格高，需求就小．因此 $Q=f(P)$ 是单调减函数．

因 $Q=f(P)$ 单调减少，所以存在反函数 $P=f^{-1}(Q)$，也称为需求函数．它表示一种产品能够出售的单价与以这种价格出售的产品数量间的关系．一般说来，想要出售的产品越多，价格就应越低．

一个典型的需求函数如图 94－1 所示（为方便计，我们记 $P=f^{-1}(Q)$ 为 $P=P(Q)$），其上有一个点 $Q_{\max}$，在此点处需求已完全满足，产品不再卖得出去．类似地，有一个 $P_{\max}$，在这个价格之上产品无人购买．

在典型的市场情况下，价格并不随时受需求影响，而是在一段时间之内保持不变．记这个固定价格为 $\bar{P}$（见图 94－1）．如图，取一个小区间 $[Q_{i-1},Q_i]$，如果需求是 Q_i，那么根据需求函数，价格应该是 $P(Q_i)$．而实际价格是 $\bar{P}$，于是消费者每购物一件省钱 $[P(Q_i)-\bar{P}]$．如果购物 ΔQ 件，那么共省钱 $[P(Q_i)-\bar{P}]\Delta Q$．现在把这些矩形"加起来"，得到由曲线 $P=P(Q)$，$Q=0$，$P=\bar{P}$ 所围成的面积．即图 94－1 中那个曲边三角形的面积．我们定义这个量为"消费者剩余"，记为 U_C．即

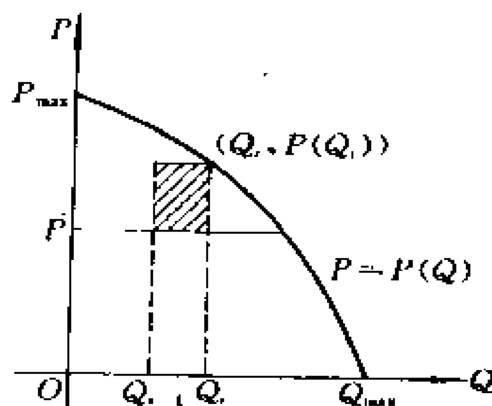


图 94－1　需求函数与消费者剩余图

$$U_C=\int_0^{\bar{Q}}[P(Q)-\bar{P}]\mathrm{d}Q \tag{1}$$

这里 $\bar{Q}$ 由 $\bar{P}=P(Q)$ 得到，且 $\bar{Q}>0$．

例 1　设某产品的需求函数是 $P=30-0.2\sqrt{Q}$．如果价格固定在每件 10 元，试计算消费者剩余．

解： 为计算 U_C，先求出对应于 $P=10$ 的 Q 值，令 $30-0.2\sqrt{Q}=10$，得 $Q=10\ 000$. 于是

$$U_C=\int_0^{10\ 000}[(30-0.2\sqrt{Q})-10]\mathrm{d}Q$$

$$=\left(20Q-\frac{2}{15}Q^{3/2}\right)\Big|_0^{10\ 000}=66666.67(\text{元})$$

"供给"是指在一定价格条件下，生产者愿意出售并且有可供出售的商品量.

供给也是由多种因素决定的. 我们仍略去价格以外的其它因素，只讨论供给与价格的关系.

设 S 表示商品价格，Q 表示供给量，则有

$$Q=\varphi(S)$$

称为供给函数.

一般说来，商品价格低，生产者就不愿生产，因而供给就少；反之，商品价格高，供给就多. 因此，一般供给函数为单调增函数. 因为 $Q=\varphi(S)$ 单调增加，所以有反函数 $S=\varphi^{-1}(Q)$，也称为供给函数. 图 94－2 是一个供给函数的图象，这里 $S=\varphi^{-1}(Q)$ 用 $S=S(Q)$ 记之. 量 S_{min} 表示生产者认为可以接受的最低售价，它与生产者的固定成本或管理费有关. 如果该产品以每件 $\bar{S}$ 元的价格卖出，且 $\bar{S}>S_{min}$，那么开始时生产者赚的钱比他希望的要多. 这多出来的数(至少在纸面上)叫做"生产者剩余". 图 94－2 中阴影部分的面积就代表这个量，记为 U_P

与公式(1)的推导类似，生产者剩余 U_P 的计算公式为

$$U_P=\int_0^{\tilde{Q}}[\bar{S}-S(Q)]\mathrm{d}Q \tag{2}$$

其中 $\tilde{Q}$ 由 $\bar{S}=S(Q)$ 解出，且 $\tilde{Q}>0$.

例 2 设 $S(Q)=250+3Q+0.01Q^2$，如果产品的单价为 425 元，试计算生产者剩余.

解： 现 $\bar{S}=425$，由 $425=250+3Q+0.01Q^2$ 得一正解 $\tilde{Q}=$

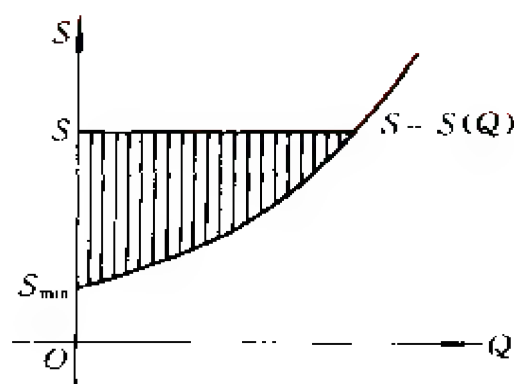


图 94－2　供给函数与生产者剩余图

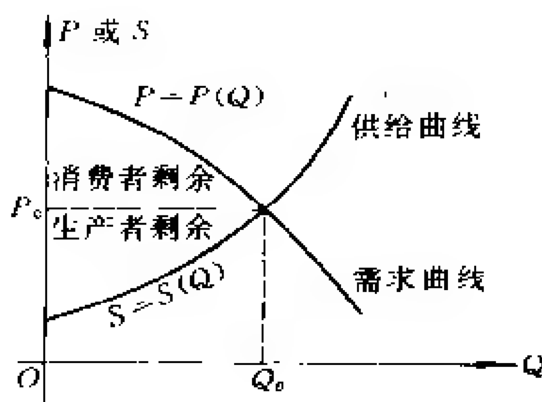


图 94－3　在 Q_0 处
供需双方受益相同

50，故

$$U_P = \int_0^{50} [425 - (250 + 3Q + 0.01Q^2)] \mathrm{d}Q$$

$$= \int_0^{50} (175 - 3Q - 0.01Q^2) \mathrm{d}Q = 4583.33(\text{元})$$

下面把需求和供给这两个概念放在一起研究．我们定义供求相等时的价格为“纯粹竞争价格”，记为 P_0．一个典型的情况画于图 94－3 中，在该图中，可以看到在纯粹竞争系统中存在一个生产水平(记为 Q_0)，在该水平处供求双方受益相等．

当 $P < P_0$ 时，如图 94－4 中的 P_1 处，此时消费者希望购买的

商品量为 Q_D，而生产者愿意出卖的商品量为 Q_S，$Q_S < Q_D$，市场上出现“供不应求”，商品短缺，会形成抢购，黑市等情况．这种情况不会持久，必然导致价格上涨，P 增大．

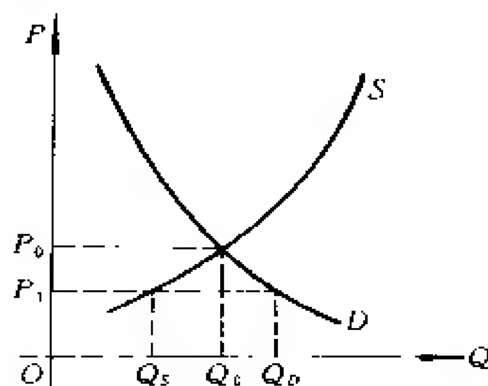


图 94－4　$P < P_0$ 时“供不应求”

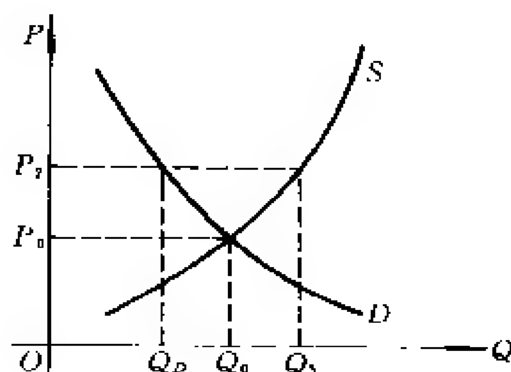


图 94－5　$P > P_0$ 时“供过于求”

（图 94－4 与 94－5 中的 D、S 分别表示需求和供给曲线）

当 $P > P_0$ 时，如图 94－5 中的 P_2 处，此时 $Q_D < Q_S$，市场上出现“供过于求”，商品滞销．这种状况也不会持久，必然导致价格下跌，P 减小．

总之，市场上的商品价格将围绕纯粹竞争价格摆动．

参考文献： [1]，上册，p.214，p.274～276；[7]，p.199～202；[9]，p.35～38，p.169～171.

95、最佳停产时间问题

某公司投资 2 000 万元建成一条生产线. 投产后，在时刻 t 的追加成本和追加收益分别为 $G(t)=5+2t^{\frac{2}{3}}$（百万元/年），$\Phi(t)=17-t^{\frac{2}{3}}$（百万元/年）. 试确定该生产线在何时停产可获得最大利润？最大利润是多少？

解： 在这里，追加成本就是总成本对时间 t 的变化率，追加收益就是总收益对时间 t 的变化率，而 $\Phi(t)-G(t)$ 是追加利润，即利润对时间 t 的变化率.

显然，$G(t)$ 是增函数 $\left(G'(t)=\frac{4}{3}t^{-\frac{1}{3}}>0\right)$，$\varphi(t)$ 是减函数 $\left(\Phi'(t)=-\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}<0\right)$. 这意味着生产费用逐年在增加，而所得收益在逐年减小. 发展下去必有某一时刻，费用与收益持平，过了这一时刻，费用大于收益，再生产就亏本了，故应停产. 我们的任务就是确定最佳停产时间，并求出所能获得的最大利润.

如图 95，该生产线所能获得的最大毛利润应是曲边三角形 ABC 面积的数额.

这里，极值存在的必要条件是

$$\Phi(t)=G(t)$$

即

$$17-t^{\frac{2}{3}}=5+2t^{\frac{2}{3}}$$

解之得

$$t=8$$

显然

$$\Phi'(8)=-\frac{2}{3}\cdot 8^{-\frac{1}{3}}<0$$

$$G'(8)=\frac{4}{3}8^{-\frac{1}{3}}>0$$

所以 $\Phi'(8)-G'(8)=(\Phi(t)-G(t))'|_{t=8}<0$

故生产线在投产 8 年时可获最大利润，其值是

$$L_{净}=\int_0^8[\varphi(t)-G(t)]\mathrm{d}t-20$$

$$=\int_0^8(12-3t^{\frac{2}{3}})\mathrm{d}t-20$$

$$=\left(12t-\frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}}\right)\Big|_0^8-20$$

$$=38.4-20=18.4(\text{百万元})$$

即最大利润是 1840 万元.

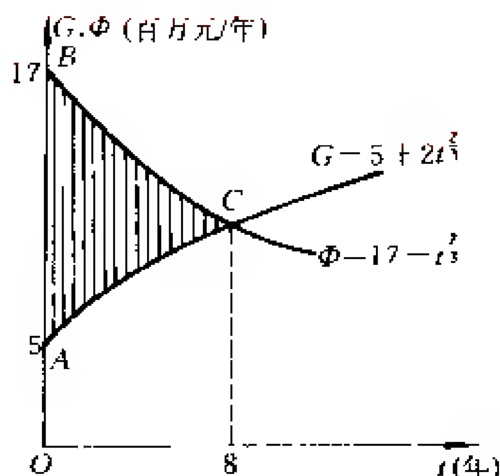


图 95　最佳停产时间是在投产 8 年时

参考文献：［8］,p.344～345.

96、商品的贮存费需多少

一零售商收到一船共 10 000 公斤大米，这批大米以常量每月 2 000公斤运走，要用 5 个月时间. 如果贮存费是每月每公斤 0.01 元，5 个月之后这位零售商需支付贮存费多少元？

解： 令 $Q(t)$表示 t 个月后贮存大米的公斤数，则

$$Q(t)=10\,000-2\,000t$$

将区间 $0\leqslant t\leqslant 5$ 分为 n 个等距的小区间，并且令 t_j 表示第 j 个小区间的左端点.

在第 j 个小区间中，每公斤贮存费用等于每月每公斤贮存费用与月数之积，于是

$$\text{每公斤贮存费用}=0.01\Delta t$$

而 t_j 个月后贮存的公斤数为 $Q(t_j)$，因此

$$\text{第 } j \text{ 小区间的贮存费}\approx 0.01Q(t_j)\Delta t$$

所以，

$$总贮存费 \approx \sum_{j=1}^{n} 0.01Q(t_j)\Delta t$$

当 n 无限增加时，由定积分定义可知

$$\begin{aligned}总贮存费 &= \int_0^5 0.01Q(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^5 0.01 \times (10\,000 - 2\,000t)\mathrm{d}t \\ &= 250(元)\end{aligned}$$

参考文献： [51]，p.281～282.

97、可否判定汽车起动和刹车时的加速度和减速度

一部汽车从静止开始，沿一条直路在 1 分钟内驶过 1 196 米就停下来.若该车的调速器可以防止速度达到每秒 20 米，求证在行驶的某个时刻，该车的加速度或减速度至少有 $100\mathrm{m/s^2}$.

证： 用反证法，假设在行驶的任一时刻该车的加速度或减速度都不足 $100\mathrm{m/s^2}$，即对于所有 $t \in [0,60]$，有加速度 $v'(t)$满足：

$$|v'(t)| < 100(\mathrm{m/s^2})$$

于是，对于所有 $t \in [0,60]$，有

$$v'(t) < 100 \tag{1}$$

且

$$-v'(t) < 100 \tag{2}$$

又由已知有：

$$v(0) = 0 = v(60)$$

于是对于所有 $t \in [0,60]$，由(1)式可得：

$$v(t) = \int_0^t v'(t)\mathrm{d}t < \int_0^t 100\mathrm{d}t = 100t \tag{3}$$

由(2)式可得：

$$v(t)=\int_t^{60}-v'(t)\mathrm{d}t<\int_t^{60}100\mathrm{d}t=100(60-t) \tag{4}$$

又由已知可得，对于所有 $t\in[0,60]$，速度 $v(t)$ 满足：

$$0\leqslant v(t)<20(\mathrm{m/s^2}) \tag{5}$$

而由于 $v(t)$ 满足不等式(3)、(4)、(5)，所以对于所有 $t\in[0,60]$，有

$$v(t)<\min\{100t,100(60-t),20\}$$

对上式两边同时求积分，得

$$\int_0^{60}v(t)\mathrm{d}t<\int_0^{60}\min\{100t,100(60-t),20\}\mathrm{d}t \tag{6}$$

而右边积分式子可算得

$$\int_0^{60}\min\{100t,100(60-t),20\}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{0.2}100t\mathrm{d}t+\int_{0.2}^{60-0.2}20\mathrm{d}t+\int_{60-0.2}^{60}100\cdot(60-t)\mathrm{d}t$$

$$=1\ 196(\mathrm{m})$$

又由已知可知，以速度 $v(t)$ 在 1 分钟走过 1 196 米，即

$$\int_0^{60}v(t)\mathrm{d}t=1\ 196\mathrm{m}$$

这就与(6)式矛盾，所以原命题成立.

参考文献： [59]，p.401～405

98、区间内平均温度可由两个固定时刻的平均温度决定

设一物体的温度 $P(t)$ 可由三次多项式给出，其中 t 为时间变量. 试证这物体在上午 9:00 至下午 3:00 之间的平均温度，总是能由取两个固定时刻的温度的平均值来求得，而不依赖于上面的多项式. 并证明：这两个时刻（精确到分钟）是上午 10:16 与下午

1:44.

解: 设温度 $P(t)=at^3+bt^2+ct+d$.

令等式 $$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}P(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}[P(t_1)+P(t_2)] \tag{1}$$

成立.等式左边为以 12:00 为中心,$-T$ 时刻与 T 时刻之间的平均温度;等式右边为在 $t_1,t_2\in[-T,T]$两个时刻的平均温度.即有

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(at^3+bt^2+ct+d)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}[(at_1^3+bt_1^2+ct_1+d)+at_2^3+bt_2^2+ct_2+d]$$

即 $$\frac{1}{2T}\left[\frac{1}{4}at^4+\frac{1}{3}bt^3+\frac{1}{2}ct^2+\mathrm{d}t\right]\Big|_{-T}^{T}=\frac{1}{2}a(t_1^3+t_2^3)+\frac{1}{2}b(t_1^2+t_2^2)+\frac{1}{2}c(t_1+t_2)+d$$

即 $$\frac{1}{3}bT^2+d=\frac{1}{2}a(t_1^3+t_2^3)+\frac{1}{2}b(t_1^2+t_2^2)+\frac{1}{2}c(t_1+t_2)+d$$

即 $$\frac{1}{2}a(t_1^3+t_2^3)+b\left[(t_1^2+t_2^2)/2-\frac{1}{3}T^2\right]+\frac{1}{2}c(t_1+t_2)=0 \tag{2}$$

于是,若(1)式对所有的 $P(t)$都成立,等价于(2)式对于任给的 a、b、c、d 都成立,于是有

$$\begin{cases}\frac{1}{2}(t_1^3+t_2^3)=0\\ \frac{t_1^2+t_2^2}{2}-\frac{T^2}{3}=0\\ \frac{t_1+t_2}{2}=0\end{cases}$$

解得 $t_{1,2}=\pm T/\sqrt{3}$时,对于任何 a、b、c、d 的值,(2)式都成立.现在 T 为 3 小时,所以 $T/\sqrt{3}\approx 1$ 小时 43 分 55 秒,t_1 和 t_2 为正午前后 1 小时 44 分,即这两个时刻是上午 10:16 和下午 1:44.

注: 此题正是使用了多项式的特点来解题.此题可进一步考

虑，当函数为二次多项式时，此题可得到相同的结论．而对于 $P(t)$ 为高于四次（包括四次）多项式，此题无解．但对于 $P(t)$ 为零次和一次多项式时，此问题却有无穷多解，即任何两个时刻的温度的平均值都满足此题的结论．

参考文献： [59]，p.401～404.

99、高速公路出口处车辆平均行驶速度

某公路管理处在城市高速公路出口处，记录了几个星期内平均车辆行驶速度．数据统计表明，一个普通工作日中的下午1:00至6:00之间，此口在 t 时刻的平均车辆行驶速度为

$$s(t)=2t^3-21t^3+60t+40(\text{km/h})$$

左右，试计算下午1:00至6:00内的平均车辆行驶速度？

解： 一般地，连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值，等于函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分除以区间 $[a,b]$ 的长度 $b-a$.

此题目的是求函数 $s(t)$ 在区间 $[1,6]$ 内的平均值．

$$\begin{aligned}\text{平均车辆行驶速度} &= \frac{1}{6-1}\int_1^6 s(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{6-1}\int_1^6 (2t^3-21t^2+60t+40)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}t^4-7t^3+30t^2+40t\right)\Big|_1^6 \\ &= 78.5(\text{km/h})\end{aligned}$$

参考文献： [51]，p.284～285.

100、根据二维切片估计组织中小颗粒的数目

在研究组织内部的构造中，有时需要估计含在组织中某种成份的体积．这些成分是随机地包含在组织中，当然“随机”这个词也很不好定义，它的意思就是说某种化学成分在组织中的分布是无规则的，但又不是聚集成团的．图100说明了这种情况．

组织可以通过它的切片来研究．组织切片比几个微米(10^{-6} m)还要薄，这样一个切片可以作为来自于三维物体的二维样品，那么就提出这样的问题：组织成分能够从切片中估计出来吗？

解： 按照Weibel所给出的一种表示法：设体积为 $V=L^3$ 的立方体包含有各种形状的且具有均匀大小的颗粒，它们并不聚集成团，所有小颗粒的体积为 $v<V$，即

$$v=\rho\cdot V \qquad (\rho<1) \tag{1}$$

我们的目的是通过观察切片估计比率 ρ．正如在图100中所示，使立方体的一个面与 D_{xy} 平面相重合，另一个面与 O_{xz} 重合，第三个面与 O_{yz} 重合．

考虑一个平行于 O_{yz} 平面的薄切片（厚为 dx），它的体积是 $dV=L^2dx$．在这个切片上，设

$$dv=\eta(x)\cdot dV=\eta(x)L^2dx \tag{2}$$

表示小颗粒部分所占的体积，比率 $\eta(x)$ 依赖于切片所切的位置 x．引进平均比率

$$\bar{\eta}=\frac{1}{L}\int_0^L \eta(x)dx \tag{3}$$

由(2)式可得：$v=\int dv=\int_0^L \eta(x)L^2dx=L^2\int_0^L \eta(x)dx$

由(3)式可得： $v=L^2\cdot L\cdot\bar{\eta}$

与(1)式相比较，可得：$\rho=\bar{\eta}$ (4)

换句话说，一个组织成分的三维比率等于二维平均比率，这个

定律是 Delesse 在 1842 年发现的.

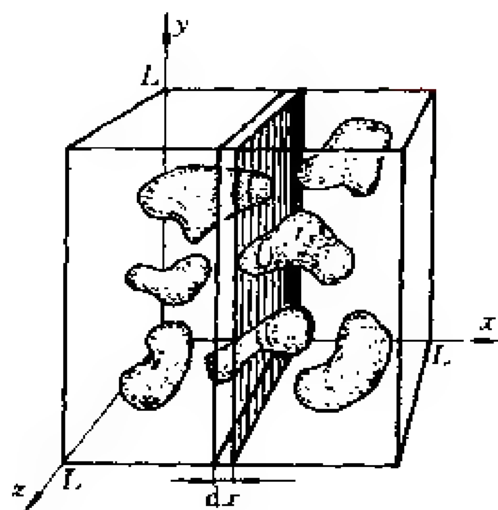


图 100 组织中的小颗粒

参考文献： [41],p.223～225.

101、半球面电极的接地电阻问题

如图 101 所示，半径为 r_0 的半球形电极埋入地下，半球的大圆面恰好与地表重合. 设大地的电阻率为 ρ，并假定自半球面流出的电流均匀地流经大地散开至无穷远处. 试求半球面电极的接地电阻.

解： 我们知道，长为 l，截面积为 s 的棒，其电阻 R 为

$$R=\rho\frac{l}{s}$$

这是一个有限量的关系式(其中 ρ 为棒的电阻率)，当长度 l 缩小到线元时，用 dl 表示之. 此时相应于 dl 长的电阻也很小，用 dR 表示. 从面有微

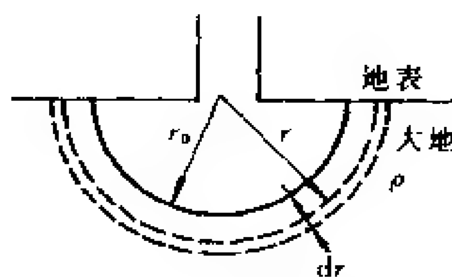


图 101 将半球形电极埋入地下

分关系式

$$dR = \rho \frac{dl}{s} \tag{1}$$

取图 101 所示的薄半球壳为导体元，其面积为 $s = 2\pi r^2$，由(1)式得导体元电阻

$$dR = \rho \frac{dr}{s} = \rho \frac{dr}{2\pi r^2}$$

欲求大地的电阻 R，只要把构成大地的各导体元的电阻都相加起来即可. 这就要求变量 r 从 r_0 变到∞，于是

$$R = \frac{\rho}{2\pi}\int_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{2\pi}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_0}^{\infty}$$

$$= \frac{\rho}{2\pi r_0}$$

为大地电阻，即半球面电极的接地电阻.

参考文献： [13], p.109~110.

102、飞出火星去

火星的直径是 6860 千米，其表面的重力加速度是 3.92 米/秒^2，若在火星上发射一枚火箭，试问要用怎样的初速度才能摆脱火星的引力?

解： 设火星的半径为 R，质量为 M，火箭的质量为 m. 根据万有引力定律，当火箭离开火星表面距离为 x 时，它所受火星的引力为

$$f = \frac{kMm}{(R+x)^2}$$

当 $x = 0$ 时，$f = mg$，因而 $kM = R^2 g$

所以
$$f = \frac{R^2 gm}{(R+x)^2}$$

当它再上升距离 dx 时，它的位能便增加

$$dW = f dx = \frac{R^2 gm}{(R+x)^2} dx$$

这就是功"元素"。所以火箭自火星表面 $x=0$ 达到高度 h 时，所获得的位能(即要做的功)总共为

$$W = \int_0^h \frac{R^2 gm}{(R+x)^2} dx = R^2 gm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$

当 $h\to\infty$ 时，$W\to Rgm$。所以初速 v_0 必须使动能 $\frac{1}{2}mv_0^2 \geqslant Rgm$，火箭才能脱离火星引力。由此得 $v_0 \geqslant \sqrt{2gR}$，而 $g = 392\text{cm/s}^2$，$R = 3\ 430\times10^5\text{cm}$，故

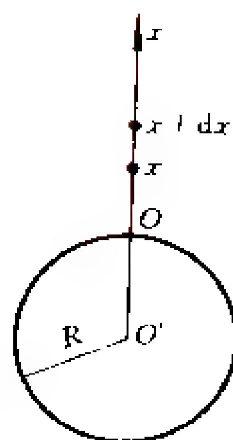


图 102　在火星上发射火箭

$$v_0 \geqslant \sqrt{2\times392\times3\ 430\times10^5} \approx 5.186(\text{km/s})$$

注：　众所周知，脱离地球引力所需要的速度为 11.2km/s，由此看来，如果人类有一天能在火星上居住，那么从火星上乘宇宙飞船去太空遨游应当要比从地球上飞去容易得多.

参考文献：　[1],p.283;[18],p.232～235.

103、你知道物体的辐射能与温度之间的关系吗

一般物体只要绝对温度不是零度都会发出辐射能. 设某物体单位面积的辐射能(即辐射强度)为 e，这个值随波长的不同而变化. 现在来求黑体的辐射能 e^0 与绝对温度 T 之间的关系.

解：　设黑体在波长$[\lambda,\lambda+d\lambda]$上的辐射强度为 e_λ^0，辐射能为 de^0，由普朗克(Plank)定律知

$$de^0 = e_\lambda^0 d\lambda \qquad (1)$$

其中

$$e_\lambda^0 = \frac{c_1\lambda^{-5}}{e^{c_2/\lambda T} - 1} \qquad (2)$$

式中的 c_1, c_2 为常数，T 为绝对温度.

根据普朗克定律，用 e_λ^0 对波长 λ 作图，从(2)容易看到 $\lambda \to 0^+$ 时，$e_\lambda^0 \to 0$，当 λ 值增大，则 e_λ^0 也增大，在某一固有波长 λ_m 时达到它的最大值，然后又随 λ 的增加而减小，当 $\lambda \to +\infty$ 时，$e_\lambda^0 \to 0$. 由(1)式看出，曲线(2)与 λ 轴所围成的面积，表示该温度 T 下的总辐射强度 e^0，即

$$e^0 = \int_0^{+\infty} e_\lambda^0 \mathrm{d}\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{c_2/\lambda T} - 1} \mathrm{d}\lambda$$

由于 $$\int_0^{+\infty} \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{c_2/\lambda T} - 1} \mathrm{d}\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{c_1 \lambda^{-5} \cdot e^{-c_2/\lambda T}}{1 - e^{-c_2/\lambda T}} \mathrm{d}\lambda$$

所以

$$e^0 = \int_0^{+\infty} \frac{c_1 \lambda^{-5} e^{-c_2/\lambda T}}{1 - e^{-c_2/\lambda T}} \mathrm{d}\lambda$$

设 $\frac{1}{\lambda} = x$，则 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{\lambda^2}\mathrm{d}\lambda$. 又 $x = 0$ 时，$\lambda = +\infty$，$x = +\infty$ 时，$\lambda = 0$.

所以得

$$e^0 = -c_1 \int_{+\infty}^{0} \frac{x^3 e^{-c_2/\lambda T}}{1 - e^{-c_2/\lambda T}} \mathrm{d}x = c_1 \int_0^{+\infty} \frac{x^3 e^{-c_2/\lambda T}}{1 - e^{-c_2/\lambda T}} \mathrm{d}x \tag{3}$$

但上式右端的被积函数的原函数不能用初等函数表示，现用幂级数展开求其积分.

由于

$$(1 - z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{，收敛域是} |z| < 1$$

现设 $z = e^{-c_2 x/T}$，所以有

$$\frac{1}{1 - e^{-\frac{c_2}{T}x}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nc_2}{T}x} \tag{4}$$

由于对所有 $x > 0$，均有 $0 < e^{-\frac{c_2}{T}x} < 1$，所以级数(4)对于 $x > 0$ 均收敛. 将(4)式代入(3)式，得

$$e^0 = c_1\int_0^{+\infty}\left[x^3 e^{-\frac{c_2}{T}x}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{nc_2}{T}x}\right]dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_1\left(\int_0^{+\infty} x^3 e^{-\frac{nc_2}{T}x}dx\right) \tag{5}$$

设(5)式右端括弧内的积分为 I_n，则

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-mx}dx\left(其中\ m=\frac{nc_2}{T}\right)$$

$$= -\frac{1}{m}\int_0^{+\infty} x^3 de^{-mx}$$

$$= -\frac{1}{m}x^3 e^{-mx}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{3x^2}{m}e^{-mx}dx$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{6x}{m^2}e^{-mx}dx = \int_0^{+\infty}\frac{6}{m^3}e^{-mx}dx$$

$$= -\frac{6}{m^4}e^{-mx}\Big|_0^{+\infty} = \frac{6}{m^4}$$

由于 $$m=\frac{nc_2}{T},$$

所以 $$I_n = \frac{6}{m^4} = \frac{6T^4}{n^4(c_2)^4} \tag{6}$$

将(6)式代入(5)式，得

$$e^0 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_1 6T^4}{(c_2)^4}\frac{1}{n^4} = \frac{6c_1 T^4}{(c_2)^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \tag{7}$$

(7)式右端的值 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$，可由数学手册查得．也可推导如下：

由于 $y=x^2(x-2\pi)^2$ 在$[0,2\pi]$中的傅里叶级数展开式为

$$y=\frac{8\pi^4}{15}-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\cos n\pi x$$

当　$x=0$ 时，$y=0$ 代入上式，得

$$0=\frac{8\pi^4}{15}-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

将这个值代入(7)式,得

$$e^0=\frac{6c_1T^4}{(c_2)^4}\cdot\frac{\pi^4}{90}=aT^4 \tag{8}$$

其中 $a=\frac{c_1\pi^4}{15(c_2)^4}$,这是一个由确定的常数 c_1,c_2 定出的常数.

公式(8)就是著名的斯蒂芬—波尔兹曼(Stefan - Boltzman)定律.这个公式在计算辐射传热上具有重要意义.

一般物体的表面所具有的辐射强度 e 要比黑体的辐射强度小.即有

$$\frac{e}{e^0}=\varepsilon<1$$

这里的 e 是与波长相对应的特性,ε 随 λ 的变化而变化.

如果在整个波长范围内,有 e/e^0 = 常数,那么就称该物体为灰体.大多数工业材料均可认为是灰体,这时我们称 ε 为黑度.

对于真实物体表面间的辐射强度,斯蒂芬—波尔兹曼方程,可作如下修正:

$$e=a\varepsilon T^4$$

参考文献: [33],p.376~379.

104、你知道质点滑落所需时间最少的路线吗

求在竖直面(取竖直向下方向为 y 轴)内的两点 $A(0,0)$,$B(x_1,y_1)$之间,质点仅受重力作用的情况下由 A 滑落所需时间最少的路线.

解: 由机械能守恒定律知 $mgy=\frac{1}{2}mv^2$,故质点运动速度 v 为

$$v=\sqrt{2gy}$$

因 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$. 所以下滑过程所需的时间 T 为

$$T=\int_0^T \mathrm{d}t=\int_A^B \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2gy}}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^x \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}\mathrm{d}x.$$

现在要从形如 $T=\int_0^x F(y,y')\mathrm{d}x$ 的式子中求出曲线 $y=y(x)$, 使得 T 最小. 显然, 这个问题与例 157 类似, 也是一个泛函极值问题. 可用例 157 的方法解决(参看 p.278). 由于 $F(y,y')$ 不显含 x, 又

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}\right)=\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2}}.$$

所以所求的 $y=y(x)$ 必须满足例 157 中的欧拉方程(3), 即

$$F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=c, \text{将 } F=\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}, \frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2}}$$

代入上欧拉方程, 则得

$$\sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}-\frac{(y')^2}{\sqrt{y[1+(y')^2]}}=c$$

两边同乘以 $\sqrt{y[1+(y')^2]}$, 化简得

$$\frac{1}{\sqrt{y[1+(y')^2]}}=c$$

两端平方, 并令 $c^2=\frac{1}{c_1}$, 得

$$y[1+(y')^2]=c_1$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{\frac{c_1-y}{y}} \tag{1}$$

下面求解(1). 为了使解函数的形式更为简单, 可用参数方程表示. 为此令(1)式右端为 $\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$, 即 $\frac{c_1-y}{y}=\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}$, 于是

$$\frac{c_1}{y} = 1 + \mathrm{ctg}^2 \frac{\theta}{2}$$

$$y = c_1 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{c_1}{2}(1 - \cos\theta)$$

$$\mathrm{d}y = \frac{c_1}{2}\sin\theta \mathrm{d}\theta = c_1 \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta$$

由方程(1)，得 $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{ctg}\dfrac{\theta}{2}} = \dfrac{c_1 \sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}} \cdot \sin\dfrac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta$

$$= c_1 \sin^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{c_1}{2}(1 - \cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

两边积分，得

$$x = \frac{c_1}{2}(\theta - \sin\theta) + c_2$$

由于 $\theta = 0$ 时 $y = 0$，且 $x = 0$，所以 $c_2 = 0$.

于是得到曲线 $y = y(x)$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \dfrac{c_1}{2}(\theta - \sin\theta) \\ y = \dfrac{c_1}{2}(1 - \cos\theta) \end{cases} \tag{2}$$

c_1 可由 B 点的坐标 x_1, y_1 确定. 此曲线就是摆线，在力学中又称为捷线.

参考文献： [33], p. 505～506.

105、算一下立交桥桥墩的体积

某立交桥桥墩形如截锥体，其上下底面是半轴长分别为 a, b

和A,B的椭圆,其高为h,求桥墩的体积.

解: 如图105,上底是一个较小的椭圆,长半轴为a,短半轴为b.而下底是一个较大的椭圆,长半轴为A,短半轴为B,今求这桥墩的体积.在距下底为x作一平行于上底或下底的平面.其截面为一椭圆.

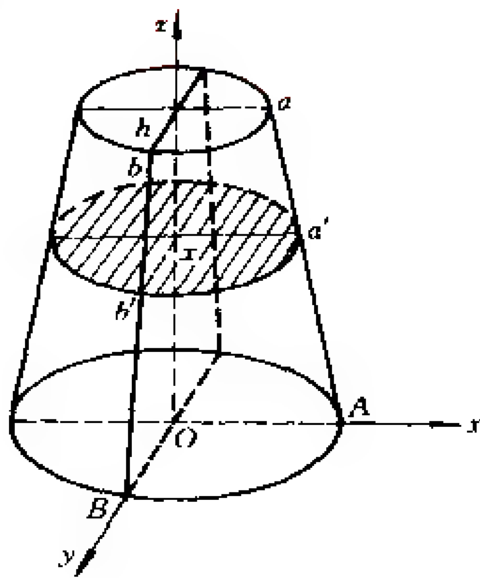


图105 桥墩体积示意

$0<x<h$,这椭圆长半轴设为a',短半轴设为b'.a'及b'的值,用相似形对应边成比例,再利定积分求出桥墩的体积.其推导如下:距底面x的椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1,$$其长半轴为a'短半轴为b'

$$\because\quad \frac{h-x}{h}=\frac{a'-a}{A-a}=\frac{b'-b}{B-b}$$

$$\therefore\quad a'=a+\left(1-\frac{x}{h}\right)(A-a)$$

$$b'=b+\left(1-\frac{x}{h}\right)(B-b)$$

截面面积为

$$s(x)=\pi a'b'=\pi\left[a+\left(1-\frac{x}{h}\right)(A-a)\right]\left[b+\left(1-\frac{x}{h}\right)(B-b)\right]$$

故所求体积为

$$V=\int_0^h s(x)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^h\left[a+\left(1-\frac{x}{h}\right)(A-a)\right]\left[b+\left(1-\frac{x}{h}\right)(B-b)\right]\mathrm{d}x$$

积分后 $$V=\frac{1}{6}\pi h[(2A+a)B+(2a+A)b]$$

从所得表示式体积与 A, B, a, b, h 均有关.

参考文献： [56],p.198～199.

106、根据库存量的函数估计保管费多少

公司每天要支付仓库的租金,保险费,保证金等都与商品的库存量有关.现在有一个公司,它每 30 天会收到 1200 箱巧克力,随后,它每天以一定的比例售给零售商.已知到货后的 x 天,公司的库存量是 $I(x)=1\,200-40\sqrt{30x}$ 箱.一箱巧克力的保管费是 0.05元.问公司平均每天要支付多少保管费?

解： 首先算出平均每天的库存量 y 是多少.因为把每日的库存量加起来再除以 30 即为 y.所以应用积分中值定理

$$y=\frac{1}{30}\int_0^{30}(1\,200-40\sqrt{30x})\mathrm{d}x=400(\text{箱})$$

故公司每天要支付 $0.05\times400=20$(元)保管费.

107、导弹跟踪飞机问题

如图 107 所示,设在初始时刻 $t=0$ 时导弹位于坐标原点$(0,0)$,飞机位于点(a,b).飞机沿着平行于 x 轴方向以常速 v_0 飞行.导弹在时刻 t 的位置为点(x,y),其速度为常值 v_1.导弹在飞行过程中,按照制导系统始终指向飞机.试确定导弹的飞行轨迹以及击中飞机所需要的时间 T.

解： 首先建立导弹的运动方程.导弹的飞行曲线在点 $M(x,y)$处的切线方程为

$$\begin{aligned}Y-y&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(X-x)\\&=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)(X-x)\end{aligned}$$

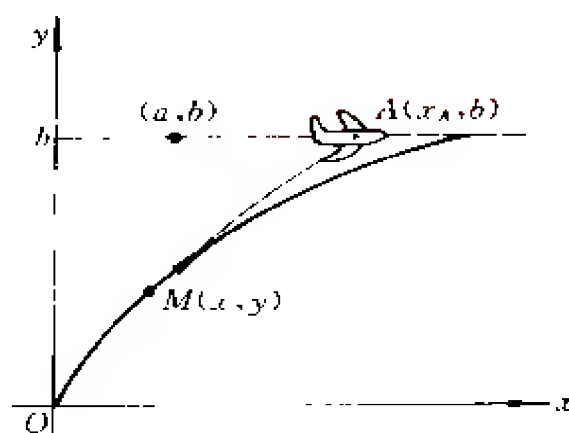


图 107 导弹跟踪飞机示意图

其中(X,Y)为切线上动点的坐标.由于点$A(x_A,b)$应位于切线上,且$x_A=a+v_0t$,因此

$$b-y=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)(a+v_0t-x)$$

从而导弹的飞行轨线由方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(b-y)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(a+v_0t-x) & (1)\\ \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2=v_1^2 & (2)\end{cases}$$

给出.由(1)式,得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(b-y)=a+v_0t-x$$

两边关于t求导,得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(b-y)-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_0-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(b-y)=v_0 \tag{3}$$

从方程(2),得

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\cdot\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}\right)^2\right]=v_1^2$$

即
$$\frac{dy}{dt}=v_1\Big/\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{1/2}$$
将上式代入(3),得到导弹的运动方程为
$$\frac{d^2x}{dy^2}(b-y)=\lambda\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{1/2} \tag{4}$$
其中 $\lambda=\frac{v_0}{v_1}$ 表示飞机和导弹的速度比.

方程(4)是一个二阶非线性方程. 根据导弹初始时刻位于(0, 0)点,我们有
$$x(0)=0 \tag{5}$$
在时刻 T 导弹击中目标,因此又有
$$x(b)=a+v_0T \tag{6}$$
这里 T 为跟踪时间,待确定. 于是,导弹跟踪问题归结为求二阶非线性方程(4)的满足边值条件(5)、(6)的解.

上述问题可以通过初等积分法解决. 设 $p=\frac{dx}{dy}$,则$\frac{dp}{dy}=\frac{d^2x}{dy^2}$. 因此,方程(4)化为
$$\frac{dp}{dy}(b-y)=\lambda(1+p^2)^{1/2} \tag{7}$$
它是可分离变量型方程,其通积分为
$$\ln[p+(1+p^2)^{1/2}]=-\lambda\ln(b-y)+C_1$$
其中 C_1 是任意常数. 方程(7)的初始条件为
$$p(0)=\frac{a}{b} \tag{8}$$
令
$$\mu=\frac{a}{b},K=\mu+\sqrt{1+\mu^2}$$
根据初始条件(8),得到
$$C_1=\ln K+\lambda\ln b=\ln(Kb^\lambda)$$
从而
$$\ln(p+\sqrt{1+p^2})=\ln(b-y)^{-\lambda}+\ln(Kb^\lambda)=\ln[Kb^\lambda/(b-y)^\lambda]$$

所以 $$p+\sqrt{1+p^2}=Kb^\lambda/(b-y)^\lambda$$
于是，我们得到降阶的方程为
$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}\left[\frac{Kb^\lambda}{(b-y)^\lambda}-\frac{(b-y)^\lambda}{Kb^\lambda}\right].$$
它的通解是
$$x=\frac{1}{2}\left[\frac{Kb^\lambda}{(\lambda-1)(b-y)^{\lambda-1}}+\frac{(b-y)^{\lambda+1}}{(\lambda+1)Kb^\lambda}\right]+C \qquad (9)$$
其中 C 是任意常数，根据第一个边值条件(5)，求得
$$C=b[(1+K^2)\lambda+K^2-1]/2K(1-\lambda^2) \qquad (10)$$
一般来说，$v_0<v_1$，所以 $\lambda<1$. 将(10)代入(9)式，我们得到导弹的飞行轨线方程为
$$x=\frac{1}{2}\left[\frac{(b-y)^{1+\lambda}}{(1+\lambda)Kb^\lambda}-\frac{Kb^\lambda(b-y)^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right]+$$
$$b[(1+K^2)\lambda+K^2-1]/2K(1-\lambda^2) \qquad (11)$$
利用第二个边值条件(6)，求得导弹的跟踪时间为
$$T=\frac{C-a}{v_0}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a\lambda}{v_1(1-\lambda^2)} \qquad (12)$$

参考文献： [18], p. 245～248.

108、收音机怎样选择电台

不同的广播电台，使用不同的频率 $f_1, f_2, f_3, \cdots$ 进行广播，收音机是怎样从众多的电台中选择所要的电台呢(图 108－1)？

原来，通常用的是选频回路，其原理如图 108－2 所示. 只要我们适当调节可变电容 C，就能从天线所接收到的许许多多讯号中选出所要电台的讯号，而滤去其它电台的讯号，收听到想听的广播，下面我们来说明这一点.

设某广播信号的电流为 $i=i_0\sin \omega t$，它流过 LC 选频回路及

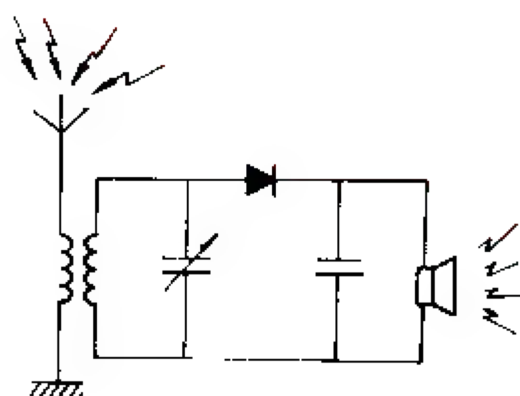


图 108－1　收听广播

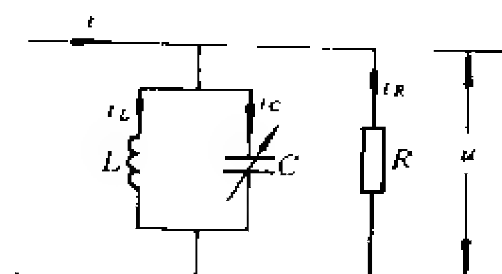


图 108－2　选频回路原理图

负载 R 后，在输出端产生电压 $u(t)$，问题是如何调节可变电容 C，使这个讯号的电压 u 的振幅最大.

由图 108－2 看出，

$$u = i_R \cdot R$$

$$u = \frac{1}{C}\int i_C \mathrm{d}t$$

$$u = L \cdot \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

因 $i_R + i_C + i_L = i$，所以

$$\frac{u}{R} + C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L}\int u\mathrm{d}t = i_0 \sin \omega t$$

将上式两边对 t 求导，得

$$C\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{du}{dt}+\frac{1}{L}u=i_0\omega\cos\omega t$$

或
$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{1}{CR}\frac{du}{dt}+\frac{1}{CL}u=\frac{i_0\omega}{C}\cos\omega t \tag{1}$$

这是形如

$$x''+2\delta x'+\omega_0^2x=p\cos\omega t \tag{2}$$

的二阶常系数非齐次线性微分方程,其通解为

$$x(t)=Ae^{-\delta t}\sin(\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\,t+\varphi)+$$
$$\frac{p}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}}\cos(\omega t-\varphi_0)$$

上式第一项随着时间的推移很快衰减为 0,第二项是周期为$\frac{2\pi}{\omega}$的强迫振动,其振幅为

$$\frac{p}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}} \tag{3}$$

显见,(2)中的 $\delta=\frac{1}{2CR}$,$\omega_0^2=\frac{1}{CL}$,$p=\frac{i_0\omega}{C}$,将它们代入(3)式,求得振幅

$$H=\frac{\frac{i_0\omega}{C}}{\sqrt{\left(\frac{1}{CL}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{\omega}{CR}\right)^2}}=\frac{i_0R}{\sqrt{\left(\frac{1}{CL}-\omega^2\right)^2\left(\frac{CR}{\omega}\right)^2+1}}$$

由此可见,只要调节可变电容 C,使$\frac{1}{\sqrt{CL}}=\omega$时,这个讯号的电压 u 的振幅就达到最大,即产生电的共振.而其它电台的输入讯号电压的振幅很小,即被滤去,收音机就是这样通过选频回路来选择电台的.这是利用共振现象的一个典型实例.

参考文献: [6],p.65~67;[15],物理 2,p.159~160.

109、核废料的处理问题

以前，美国原子能委员会将放射性核废料装在密封的圆桶里扔到水深约91米的海里. 生态学家和科学家耽心这种做法不安全而提出疑问. 原子能委员会向他们保证，圆桶决不会破漏. 经过周密的试验，证明圆桶的密封性是很好的. 但工程师们又问：圆桶是否会因与海底碰撞而发生破裂？原子能委员会说：决不会. 但工程师们不放心. 他们进行了大量的实验后发现：当圆桶的速度超过每秒12.2米时，圆桶会因碰撞而破裂. 那末圆桶到达海底时的速度到底是多少呢？它会因碰撞而破裂吗？下面是些具体而真实的数据，你能根据它们解决这个问题吗？

圆桶的重量　$W = 239.456$ kg

海水浮力为　1025.94kg/m^3

圆桶的体积　$V = 0.208 \text{m}^3$

圆桶下沉时的阻力：工程师们做了大量牵引试验后得出结论：这个阻力与圆桶的方位大致无关，而与下沉的速度成正比，比例系数 $k = 0.12$.

解： 建立坐标系，设海平面为 x 轴，y 轴的方向向下为正. 由牛顿第二定律 $F = ma$，其中 m 为圆桶质量，$a = \frac{d^2y}{dt^2}$，F 为作用在圆桶上的力：它由圆桶的重量 W，海水作用在圆桶上的浮力 $B = 1025.94 \times V = 213.396$(kg) 及圆桶下沉时的阻力 $D = kv = 0.12v = 0.12\frac{dy}{dt}$.（其中 v 为下沉速度）合成.

即　　$F = W - B - D = W - B - kv$ 这样就得到一个二阶微分方程

$$\begin{cases} W-B-k\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} \\ y(0)=0 \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=v(0)=0 \end{cases} \tag{1}$$

此微分方程是 $y''=f(y')$ 型的. 解此方程:

由于 $v=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 代入(1)得到一个一阶可分离变量的方程

$$\begin{cases} W-B-kv=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ v(0)=0 \end{cases}$$

解得, $$v(t)=\frac{W-B}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

至此,数学问题似乎有了结果,得到了速度与时间的表达式. 但实际问题远没有解决. 因为圆桶到达海底所需的时间 t 并不知道,因而也就无法算出速度. 这样,上述的表达式就没有实际意义. 有人会说,虽然无法算出精确值但我们可以估计当 $t\to+\infty$ 时, $v(t)\to\dfrac{W-B}{k}$. 因而圆桶到达海底的速度不会超过 $\dfrac{W-B}{k}$. 这个说法是对的,但可惜 $\dfrac{W-B}{k}=217.2\mathrm{m/s}$, 它太大了,毫无用处. 这样,方程(1)就得用别的方法来解. $y''=f(y')$ 型方程的另一种解法是:令 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=v\cdot\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$, 方程(1)也化为一个一阶可分离变量的方程

$$\begin{cases} mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=W-B-kv \\ v(0)=0 \\ y(0)=0 \end{cases} \tag{2}$$

解之, $\dfrac{v}{W-B-kv}\mathrm{d}v=\dfrac{1}{m}\mathrm{d}y$

得 $$\frac{1}{m}y=-\frac{1}{k}v-\frac{W-B}{k^2}\ln(W-B-kv)+C$$

由初始条件得

$$C=\frac{W-B}{k^2}\ln(W-B)$$

所以 $$\frac{1}{m}y=-\frac{v}{k}-\frac{W-B}{k^2}\ln\left(\frac{W-B-kv}{W-B}\right) \tag{3}$$

求当 $y=91$(米)时，$v=?$. 似乎这个 v 值也无法求得，但我们用近似方法例如牛顿法迭代可求出 v 的近似值.

牛顿法介绍：若已知方程 $g(v)=0$，求 v. 用迭代法：

令 $$v_{n+1}=v_n-\frac{g(v_n)}{g'(v_n)},\ n=0,1,2,\cdots$$

在这里，(3)式可写成

$$\frac{1}{m}y+\frac{v}{k}+\frac{W-B}{k^2}\ln\left(\frac{W-B-kv}{W-B}\right)=0$$

取 $$g(v)=\frac{k}{m}y+v+\frac{W-B}{k}\ln\left(\frac{W-B-kv}{W-B}\right)$$

$$=\frac{k\cdot a\cdot y}{W}+v+\frac{W-B}{k}\ln\left(\frac{W-B-kv}{W-B}\right).$$

其中 $a=9.8\mathrm{m/s^2}$，记 $d=\dfrac{k\cdot a\cdot y}{W}=0.447$

$b=\dfrac{W-B}{k}=217.167$，于是

$$g(v)=d+v+b\ln\left(1-\frac{v}{b}\right)$$

$$g'(v)=1+b\cdot\frac{-\frac{1}{b}}{1-\frac{v}{b}}=-\frac{v}{b-v}.$$

迭代格式为：

$$v_{n+1}=v_n-\frac{g(v_n)}{g'(v_n)}$$

$$= v_n + \frac{b - v_n}{v_n}\left[d + v_n + b\ln\left(1 - \frac{v_n}{b}\right)\right]$$

$$= v_n + \frac{b - v_n}{v_n}\cdot v_n + \frac{b - v_n}{v_n}\left[d + b\ln\left(1 - \frac{v_n}{b}\right)\right]$$

$$= b + \frac{b - v_n}{v_n}\left[d + b\ln\left(1 - \frac{v_n}{b}\right)\right] \tag{4}$$

选择一个好的初始值 v_0，就能很快算出结果．求 v_0 的粗略近似值：从(2)中令 $k=0$(即下沉时不计阻力)得 $\frac{1}{2}mv^2=(W-B)y+C$ 由初始条件得 $C=0$．　∴　$v^2=\frac{W-B}{m}\cdot 2y$≈13.93m/s

以 $v_0=13.93$ 代入(4)得

$v_1=13.64061$．把 v_1 代入(4)

有　$v_2=13.63728$，把 v_2 代入(4)

$v_3=13.63728\cdots$这就够了，不用再迭代了．

$v \doteq 13.64$m/s>12.2m/s，因此这种处理核废料的方法是不安全的．

参考文献：［28］，上册，p.55～61．

110、雪球融化问题

假定一个雪球是半径为 r 的球，其融化时体积的变化率正比于雪球的表面积，比例常数为 $k>0$(k 与环境的相对湿度，阳光，空气温度等因素有关)．已知两小时内融化了其体积的四分之一．问其余部分在多长时间内全部融化完？

解：　首先根据体积的变化率正比于雪球的表面积列出关系式

$$\frac{dV}{dt} = -k\cdot 4\pi r^2$$

因为体积 V 是单调下降的，所以 $\frac{dV}{dt}<0$，故在等式右端加负号.

$$\because \qquad V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\therefore \qquad 4\pi r^2\frac{dr}{dt}=-k\cdot 4\pi r^2$$

$$\frac{dr}{dt}=-k,\text{解得 } r=-kt+C.$$

令 $t=0$ 时，$r=r_0$.

$$\therefore \qquad r=r_0-kt \tag{1}$$

于是 $t=2$ 小时的时候 $r=r_0-2k$. 根据题设：两小时内雪球的体积减少了四分之一，可列出下式

$$\frac{4}{3}\pi(r_0-2k)^3=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi r_0^3$$

得

$$r_0-2k=\sqrt[3]{\frac{3}{4}}r_0$$

$$k=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)r_0 \tag{2}$$

由(1)及(2)即可求出雪球全部融化所需时间. 因为雪球全部融化，$r=0$.

由(1)

$$t=\frac{r_0}{k}=\frac{2}{1-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}}\approx 21.87\approx 22(\text{h})$$

因为雪球全部融化需 22 小时，故余下部分大约需 20 小时才能融化完.

如果您对从南极拖一座冰山到沙漠国家之举感兴趣，不妨收集一些资料，分析一下此举是否可行.

参考文献： [27], p. 212.

111、马王堆一号墓年代的确定

考古、地质等方面的专家常用^{14}C(碳—14,碳—12的同位素)测定法(通常称为碳定年代法)去估计文物或化石的年代.长沙市马王堆一号墓于1972年8月出土,其时测得出土的木炭标本的^{14}C平均原子蜕变数为29.78次/分,而新砍伐烧成的木炭中^{14}C平均原子蜕变数为38.37次/分,又知^{14}C的半衰期(给定数量的^{14}C蜕变到一半数量所需的时间)为5 568年,试估算一下该墓的大致年代.

碳定年代法的根据

宇宙射线不断轰击大气层,使之产生中子,中子与氮气作用生成具有放射性的^{14}C,这种放射性碳可氧化成二氧化碳.二氧化碳被植物所吸收,而动物又以植物作食物,于是放射性碳就被带到各种动植物体内.由于^{14}C是放射性的,无论存在于空气中或生物体内它都在不断蜕变.活着的生物通过新陈代谢不断地摄取^{14}C,使得生物体内的^{14}C与空气中的^{14}C有相同的百分含量.生物死亡后它停止摄取^{14}C,因而尸体内的^{14}C由于不断地蜕变而不断减少.碳定年代法就是根据蜕变减少量的变化情况来判定生物的死亡时间的.

假设

1. 现代生物体中^{14}C的蜕变速度与马王堆墓葬时代生物体中^{14}C的蜕变速度相同;

2. ^{14}C的蜕变速度与该时刻^{14}C的含量成正比.

由于地球周围大气中的^{14}C的百分含量可认为基本不变(即宇宙射线照射大气层的强度自古至今基本不变),故假设1是合理的.假设2的根据来自原子物理学的理论.

建模

设在时刻t(年)生物体中^{14}C的存量为$x(t)$,由假设2知

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-kx \tag{1}$$

其中 $k>0$ 为比例常数. k 前置负号表示^{14}C的存量 x 是递减的. (1)的通解为

$$x(t)=Ce^{-kt}$$

设生物体的死亡时间为 $t_0=0$,其时^{14}C的含量为 x_0,代入上式,得 $C=x_0$,于是有

$$x(t)=x_0e^{-kt} \tag{2}$$

记^{14}C的半衰期为 T,则有

$$x(T)=\frac{x_0}{2} \tag{3}$$

将(3)代入(2),得

$$k=\frac{\ln 2}{T}$$

即有 $\qquad x(t)=x_0e^{-\frac{\ln 2}{T}t}$,由此解得

$$t=\frac{T}{\ln 2}\ln\frac{x_0}{x(t)} \tag{4}$$

由于 x_0、$x(t)$不便于测量,我们改用下面的办法求 t:

对(2)式两边求导,得

$$x'(t)=-x_0ke^{-kt}=-kx(t)$$

而 $\qquad x'(0)=-kx(0)=-kx_0$

上面两式相除,得

$$\frac{x'(0)}{x'(t)}=\frac{x_0}{x(t)}$$

将其代入(4),得

$$t=\frac{T}{\ln 2}\ln\frac{x'(0)}{x'(t)} \tag{5}$$

由假设1知,可用现代木炭中^{14}C的蜕变速度作为 $x'(0)$,即 $x'(0)=38.37$ 次/分,而 $x'(t)=29.78$ 次/分(由已知). 将它们及 $T=$

5 568年代入(5)式,得

$$t=\frac{5\,568}{\ln 2}\ln\frac{38.37}{29.78}\approx 2\,036(\text{年})$$

这样就估算出马王堆一号墓大约是2000多年前的.

注: 对^{14}C的半衰期各种书上说法不一,有人测定为5568年,也有人测定为5580年或5730年.本例是用5568年计算的,若用5580或5730年计算,则可分别求得马王堆一号墓存在于2040年或2095年前左右.

参考文献: [21],p.75~76;[1],p.323~324.

112、为什么用三级火箭发射人造卫星

运载火箭是发射人造卫星的运载工具.图112-1是运载火箭

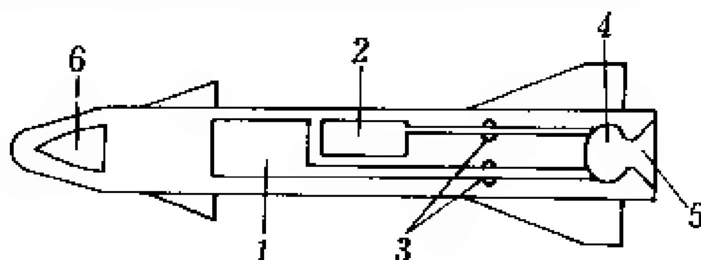


图112-1 火箭结构示意图

1.氧化剂 2.燃料 3.输送泵

4.燃烧室 5.喷门 6.卫星仓

的示意图.火箭内部装有燃料和氧化剂,经过输送泵进入燃烧室,燃烧后生成的炽热气体向后高速喷射,产生向后的动量.依据物理学中的动量守恒定律,箭体本身获得向前的动量,并以此为动力将卫星加速到预定速度并将其送入太空轨道.

问题1. 在单级火箭中,起飞质量由三部分组成:火箭的有效载荷(卫星仓)m_0,火箭的结构质量m_s和燃料质量m_f.设火箭

的燃气喷射速度为 u，火箭初速度为0，暂不考虑地球引力和空气阻力，试计算当燃料全部燃烧完毕时火箭的末速度 v.

解： 由于在运动过程中火箭的质量在不断变化，我们首先考虑一个微小时段前后火箭动量的关系.

设在时刻 t，火箭质量为 $m(t)$，向后喷出的燃气质量为 $dm(t)$. 取地球作为参照系，火箭的前进速度是 $v(t)$，燃气相对地球的喷射速度是 $v(t)-u$. 此时火箭的动量为 $m(t)v(t)+[v(t)-u]dm(t)$.

经过一个微小时段以后，火箭质量变为 $m(t)+dm(t)$，箭体的速度变为 $v(t)+dv(t)$.

由于忽略了空气阻力及地球引力的影响，火箭在上述过程中动量守恒，所以

$$(m+dm)(v+dv)=mv+(v-u)dm$$

将等式左端展开，并略去高阶无穷小量，得

$$mv+vdm+mdv=mv+vdm-udm$$

即
$$mdv=-udm,\quad \text{或}\quad dv=-u\frac{dm}{m} \tag{1}$$

这是分离变量方程，对(1)积分可得

$$v=-u\ln m+C$$

将初始条件 $v(0)=0$ 代入，可知 $C=u\ln[m_0+m_f+m_s)$

$$\therefore\qquad v(t)=u\ln\frac{m_0+m_s+m_f}{m(t)}$$

当燃料燃尽时，火箭达到末速度 v，火箭质量变为 m_0+m_s，所以火箭的末速度为

$$v_{末}=u\ln\frac{m_0+m_s+m_f}{m_0+m_s} \tag{2}$$

通常将 $\frac{m_0+m_s+m_f}{m_0+m_s}$ 记为 N，它表示火箭发射过程开始与结束时的质量比.

由(2)可知,增大喷射速度 u 或增大质量比 N,都可以使火箭末速度得到提高.

问题 2. 根据目前的技术水平,采用液氢和液氧作燃料和氧化剂,喷射速度最高可达到 4km/s. 质量比 N 受火箭结构及材料的影响不可能任意增大,目前最好的火箭结构可使 N 达到 10,即火箭起飞时装载着比自身质量重 9 倍的燃料. 请在此条件下计算火箭的末速度,并讨论用单级火箭能否把卫星送入轨道.

解: 将 $u=4\text{km/s}, N=10$ 代入(2),可求出火箭的末速度为

$$v_{末}=4\text{km/s}\times\ln10\doteq9.21\text{km/s}$$

把人造卫星送入轨道的最低速度要求是 7.9km/s,表面看起来好象用单级火箭能够完成发射要求. 但是在实际发射中,由于空气阻力和地球引力的影响,即使采用目前最好的燃料和结构,使用单级火箭也远不能把卫星送上太空.

解决这一技术难题的途径是采用多级火箭进行发射,发射过程中不断抛弃无用的结构质量,这样就能提高质量比 N,进而使火箭获得更高的末速度.

问题 3. 采用如图 112-2 所示的三级火箭进行卫星发射. 发射过程中,一级火箭首先点火工作,燃烧结束后自动脱落,接着,第二级和第三级火箭依次点火、燃烧和自动脱落. 若各级火箭的喷射速度仍为 u. 试计算三级火箭的末速度.

解: 设火箭起飞之前的质量为 M,M 包括有效载荷 m_0,各级火箭的结构质量 $m_{si}(i=1,2,3)$及各级火箭的燃料质量 $m_{fi}(i=1,2,3)$.

记 N_1 为第一级火箭工作过程的质量比,

$$N_1=\frac{m_0+\sum_{i=1}^{3}m_{si}+\sum_{i=1}^{3}m_{fi}}{m_0+\sum_{i=1}^{3}m_{si}+m_{f1}}$$

第一级火箭燃烧结束后,箭体的运度可以达到

$$v_1 = u\ln N_1$$

记 N_2 为第二级火箭工作过程的质量比，

$$N_2 = \frac{m_0 + \sum_{i=2}^{3} m_{si} + \sum_{i=2}^{3} m_{fi}}{m_0 + \sum_{i=2}^{3} m_{si} + m_{f3}}$$

第二级火箭燃烧结束后，箭体在原有速度 v_1 基础上又获得速度增量 v_2，

$$v_2 = u\ln N_2$$

同样，记 N_3 为第三级火箭的质量比，$N_3 = \frac{m_0 + m_{s3} + m_{f3}}{m_0 + m_{s3}}$ 第三级火箭所提供的速度增量为 v_3.

$$v_3 = u\ln N_3$$

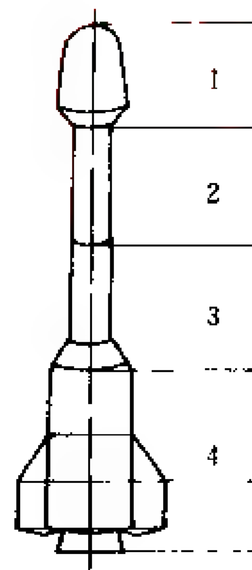


图 112－2　三级火箭示意图

1. 卫星仓 2. 第三级 3. 第二级 4. 第一级

这样，当三级火箭顺次工作后，火箭的末速度可达到

$$v = v_1 + v_2 + v_3 = u\ln N_1 + u\ln N_2 + u\ln N_3$$
$$= u\ln(N_1 N_2 N_3)$$

特别，当 $N_1 = N_2 = N_3 = N$ 时

$$v = u\ln(N^3) = 3u\ln N$$

假设喷射速度 $u = 4\text{km/s}$，各级火箭的质量比都是 $N = 8$，可计算出三级火箭的末速度：

$$v_{末} = 3u\ln N = 3\times4\times\ln 8 \approx 24.95\text{km/s}$$

与单级火箭相比，采用三级火箭大大提高了火箭的加速性能.

思考题 1. 是否火箭的级数越多，它对卫星的加速性能就越好？试推导出多级火箭的末速度公式(答案：$v = u\ln(N_1 N_2 \cdots N_K)$. 由于每个 N_i 都大于 1，所以在相同的燃气喷射速度之下，增大火箭的级数总可以使末速度得到提高).

思考题 2. 为什么目前多采用三级火箭作运载工具，而不采用级数更多的火箭(答案：火箭级数越多，结构越复杂，越难于控制．另外，火箭级数越多，火箭工作的可靠性就越低．由于以上技术原因，现在一般采用二级、三级或四级火箭)．

参考文献： [69], p. 174.

113、飞机减速伞的设计与应用

当机场跑道长度不足时，常常使用减速伞作为飞机的减速装置．在飞机接触跑道开始着陆时，由飞机尾部张开一幅减速伞，利用空气对伞的阻力减少飞机的滑跑距离，保障飞机在较短的跑道上安全着陆．

问题 1. 一架重 4.5T 的歼击机以每小时 600km 的航速开始着陆，在减速伞的作用下滑跑 500 米后速度减为每小时 100km．设减速伞的阻力与飞机的速度成正比，并忽略飞机所受的其它外力．试计算减速伞的阻力系数．

问题 2. 将同样的减速伞装备在 9T 重轰炸机上．现已知机场跑道长 1 500m，若飞机着陆速度为每小时 700km，问跑道长度能否保障飞机安全着陆？

解： 首先考虑问题 1．设飞机质量为 m，着陆速度为 v_0．若从飞机接触跑道时开始计时，飞机的滑跑距离为 $x(t)$，飞机的速度为 $v(t)=\frac{dx}{dt}$，减速伞的阻力为 $-kv(t)$，其中 k 为阻力系数．根据牛顿第二运动定律可得出运动方程

$$m\frac{dv}{dt}=-kv(t) \tag{1}$$

为了确定 $x(t)$ 与 $v(t)$ 的关系，将 $\frac{dv}{dt}$ 写成

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\cdot\frac{dv}{dx}$$

代入(1)式可得分离变量方程 $dv=-\frac{k}{m}dx$ (2)

对(2)积分,

$$\int_{v_0}^{v(t)}dv=\int_0^{x(t)}\left(-\frac{k}{m}\right)dx$$

则

$$v(t)-v_0=-\frac{k}{m}x(t)$$

由此计算出 $k=\frac{m[v_0-v(t)]}{x(t)}$ (3)

将 $m=4500\text{kg}, v_0=600\text{km/h}, v(t)=100\text{km/h}, x(t)=0.5\text{km}$ 代入(3),得出阻力系数

$$k=4.5\times10^6\text{kg/h}$$

现在考虑问题2.首先求出速度 $v(t)$ 及滑跑距离 $x(t)$ 的表达式.由(1)可得

$$\frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}dt$$

$$\int_{v_0}^{v(t)}\frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}\int_0^t dt$$

因此 $v(t)=v_0e^{-\frac{k}{m}t}$ (4)

利用 $\frac{dx}{dt}=v(t)$,对(4)再积分

$$\int_0^t x'(t)dt=\int_0^t v_0e^{-\frac{kt}{m}}dt$$

易知 $x(t)=\frac{mv_0}{k}[1-e^{-\frac{k}{m}t}]$ (5)

由(5)可知,飞机滑跑距离 $x(t)\leqslant\frac{mv_0}{k}$.将已知值代入,

$$\frac{mv_0}{k}=\frac{9\ 000\times700}{4.5\times10^6}=1.4\text{km}=1\ 400\text{m}<1\ 500\text{m}$$

所以飞机可以在此跑道上安全着陆.

思考题 若飞机除受到减速伞的阻力之外还受到跑道摩擦力 f 的影响,试写出相应的微分方程,并求出滑跑距离 $x(t)$ 的表达式.

答案:$m\frac{dv}{dt}=-kv-f, v(t)=(v_0+\frac{f}{k})e^{-\frac{k}{m}t}-f/k$,

$$x(t)=\frac{m}{k}\left(v_0+\frac{f}{k}\right)(1-e^{-\frac{k}{m}t})-\frac{f}{k}t$$

114、惠更斯钟摆

惠更斯(Christian Huygens)在研究钟摆时发现:给定一条摆线,其参数方程为

$$\begin{cases}x_1=r\theta-r\sin\theta\\y_1=-r+r\cos\theta\end{cases}\quad(-\pi<\theta<\pi)$$

取 O 点为摆线的弧所夹成的尖点,若把一个质点用长度为 $4r$ 的细线垂挂于 O 点,并使它在摆线的夹逼下摆动,则 P 点的运动轨迹仍是摆线,且这种摆的周期与摆幅无关,$T=4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$.由于这种摆具有良好的等时性,被广泛地应用于钟表制造业.这种摆被人们称为惠更斯摆.请你自己推导出惠更斯的上述结论.(图 114-1)

解: 首先我们推导 P 点的运动轨迹.取摆线上任意一点 $M(x_1,y_1)$

$$\begin{cases}x_1=r\theta-r\sin\theta\\y_1=-r+r\cos\theta\end{cases}\tag{1}$$

取 s 为从 O 到 M 沿摆线的弧长,角 t 是给定摆线在 M 点处的切线与 x 轴的夹角.根据题意,P 的坐标满足

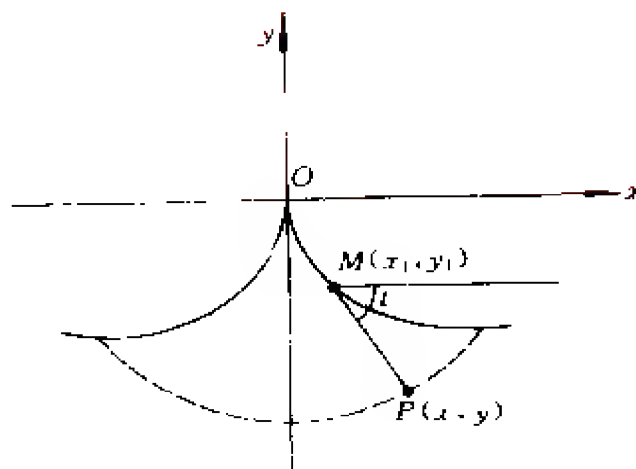


图 114-1　惠更斯摆

$$\begin{cases} x = x_1 + (4r - s)\cos t \\ y = y_1 + (4r - s)\sin t \end{cases} \tag{2}$$

s 可按如下方法计算

$$s = \int_0^\theta \mathrm{d}s = \int_0^\theta \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\theta \sqrt{r^2(1-\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2r\int_0^\theta \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\,\mathrm{d}\theta = 2r\int_0^\theta \sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 4r\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

另外　$\cos t = \dfrac{x_1'}{\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}} = \dfrac{r(1-\cos\theta)}{r\sqrt{2-2\cos\theta}} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}} = \sin\dfrac{\theta}{2}$

$$\sin t = \frac{y_1'}{\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}} = \frac{-r\sin\theta}{r\sqrt{2-2\sin\theta}}$$

$$= -\frac{2r\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{2r\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}} = -\cos\frac{\theta}{2}$$

将 s，$\cos t$，$\sin t$ 代入(2)

$$x = r\theta - r\sin\theta + 4r\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = r\theta + r\sin\theta$$

$$y=-r+r\cos\theta-4r\cos^2\frac{\theta}{2}=-r+r\cos\theta-2r(\cos\theta+1)$$

$$=-3r-r\cos\theta$$

因此，P 点的轨迹方程为

$$\begin{cases}x=r\theta+r\sin\theta\\ y=-3r-r\cos\theta\end{cases}(-\pi<\theta<\pi)\tag{3}$$

此恰为摆线方程.

下面我们证明 P 点的运动周期为 $4\pi\sqrt{\dfrac{r}{g}}$.

设 P 点的摆幅为 $-\theta_0$ 到 θ_0，P 点的运动曲线为 Γ，Γ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x(s)\\ y=y(s)\end{cases}$$

其中 s 是 Γ 从 $-\theta_0$ 到 θ 所走过的弧长.(图 114－2). 根据牛顿第二定律

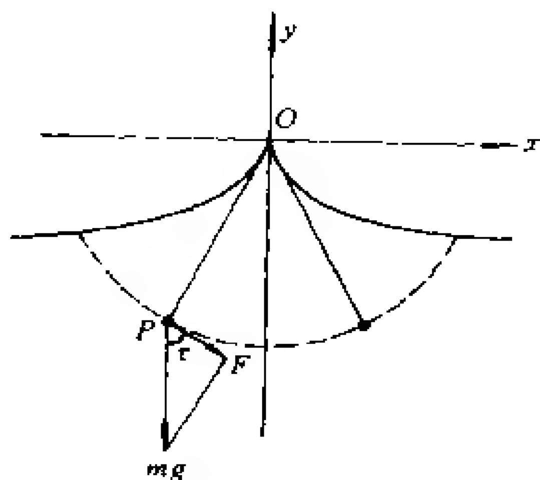


图 114－2　摆运动示意图

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-F=-mg\cos\tau=-mg\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$$

得微分方程 $$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g\frac{dy}{ds}$$

两边同乘$\frac{ds}{dt}$，可得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}s'^2\right) = -g\frac{dy}{dt}$$

积分可得 $$\frac{1}{2}s'^2 = -g[y(s) - y_0]$$

所以，

$$s' = \pm\sqrt{2g[y_0 - y(s)]}$$

$$dt = \pm\frac{ds}{\sqrt{2g[y_0 - y(s)]}}$$

P 从 $-\theta_0$ 到 θ_0 所用的时间恰为半周期，故

$$T = 2\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{ds}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} \tag{4}$$

由(3)知 $ds = \sqrt{x_\theta'^2 + y_\theta'^2}\,d\theta = \sqrt{r^2(1+\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta}\,d\theta = 2r\cos\frac{\theta}{2}d\theta$

$$y_0 - y = r(\cos\theta - \cos\theta_0) = 2r\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

代入(4)

$$T = \frac{2}{\sqrt{2g}}\int_{\theta_0}^{\theta_0}\frac{2r\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2r\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}}d\theta$$

令 $u = \frac{\sin\theta/2}{\sin\theta_0/2}$

$$T = 4\sqrt{\frac{r}{g}}\int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

至此，我们导出了惠更斯的两个结论.

参考文献： [68],p.320.

115、单摆可以用来作钟摆吗

单摆是把质量为 m 的质点 P 悬挂在一条长度为 l 的细线下方使其自由摆动的装置．可知质点的运动轨迹是圆弧

$$\begin{cases} x = l\sin\theta \\ y = -l\cos\theta \end{cases} \quad -\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$$

试推导出单摆运动周期的表达式，并通过表达式分析单摆是否适合作钟摆(图 115)．

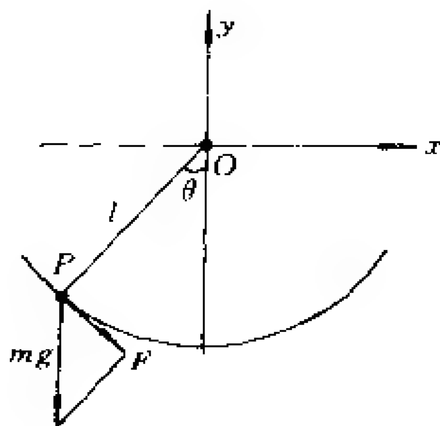


图 115 单摆

解： 设圆弧曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}$$

此处 s 是质点从 $-\theta_0$ 到 θ 所走过的弧长，$0 \leqslant s \leqslant 2l\theta_0$．根据牛顿第二定律

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -F \tag{1}$$

F 是重力 mg 在 Γ 的切线方向的分力，故

$$|F| = mg\cos\theta = mg\frac{dy}{ds} \tag{2}$$

将(2)代入(1),可得 $\frac{d^2 s}{dt^2} = -g\frac{dy}{ds}$

用$\frac{ds}{dt}$遍乘方程两边再乘以 2,可得

$$\frac{d s'^2}{dt} = -2g\frac{dy}{dt}$$

积分可得 $s' = \pm\sqrt{2g[y_0 - y(s)]}$

即: $dt = \pm\frac{ds}{\sqrt{2g(y_0 - y)}}$

质点从 $-\theta_0$ 到 θ_0 所用的时间恰为单摆的半周期,故周期

$$T(\theta_0) = 2\int_{-\theta_0}^{\theta_0} dt = 2\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{ds}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} \tag{3}$$

将 $y = -l\cos\theta, y_0 = -l\cos\theta_0, ds = l d\theta$ 代入(3)

$$T(\theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta_0}\frac{2l\,d\theta}{\sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2l}{g}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}d\theta$$

令 $u = \sin\frac{\theta}{2}\Big/\sin\frac{\theta_0}{2}$,

$$T(\theta_0) = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{(1-u^2)(1-u^2\sin^2\frac{\theta_0}{2})}}du \tag{4}$$

这是一个与摆幅 θ_0 有关的椭圆积分.可以看出 $T(\theta_0)$随着 θ_0 的减小而减小.

当 θ_0 很小时，$1-u^2\sin^2\frac{\theta_0}{2}\approx 1$.

$$T(\theta_0)\approx 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

通过以上分析可知，当 θ_0 很小时，单摆的周期约等于 $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. 但单摆的周期随摆幅 θ_0 而改变，当我们用单摆为钟表定时时，随着摆幅逐渐减小，单摆的周期也会逐渐减小，钟就会越走越快！因此，用单摆作钟摆并非十全十美.

参考文献： [68],p.319.

116、冰雹的下落速度

当冰雹由高空落下时，它除了受到地球重力的作用之外，还受到了空气阻力的作用.阻力的大小与冰雹的形状和运动速度有关，一般可对阻力作两种假设：

(1) 阻力大小与下落速度成正比.

(2) 阻力大小与速度的平方成正比.

请根据两种不同假设，分别计算冰雹的下落速度.

解： 用 y 表示冰雹的高度，y' 代表冰雹的下落速度($y'<0$).

1. 设阻力 $f=-ky'$ $\quad(k>0)$.

根据牛顿第二运动定律可建立微分方程

$$my''=-mg-ky'$$

这是一个不显含自变量 t 的微分方程.令 $v(t)=y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，上式可化为 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-g-\frac{k}{m}v$ 记 $c=\sqrt{\frac{k}{mg}}$，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-g(1+c^2v)$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{g(1+c^2 v)} = -\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{gc^2}\ln(1+c^2 v) = -(t-t_0)$$

所以，$v(t) = -\frac{1}{c^2}[1-\mathrm{e}^{-gc^2(t-t_0)}]$

2. 设阻力 $f = ky'^2 (k>0, y'<0)$

根据牛顿第二定律

$$my'' = -mg + ky'^2$$

这也是一个不显含 t 的微分方程. 令 $v(t) = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，方程化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g(1-c^2 v^2)$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{g(1-c^2 v^2)} = -\mathrm{d}t$$

解出
$$\frac{1}{2gc}\ln\frac{1-cv}{1+cv} = t-t_0$$

所以
$$v(t) = -\frac{1}{c}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-2gc(t-t_0)}}{1+\mathrm{e}^{-2gc(t-t_0)}} = -\frac{1}{c}\tanh[gc(t-t_0)]$$

思考题： 请分别就两种假设讨论冰雹的最大速度. 若没有空气阻力会怎样?

提示：不论那种假设，速率都是 t 的单调增函数，故当 t 趋向于正无穷大时速率可达到极大值. 第一种假设时，

$$V_{\max} = -\lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{c^2}[1-\mathrm{e}^{-gc^2(t-t_0)}] = \frac{1}{c^2} = \frac{mg}{k}$$

第二种假设时，

$$V_{\max} = -\lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{c}\tanh[gc(t-t_0)] = \frac{1}{c} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

上述计算结果表明，由于空气阻力的影响，冰雹落到地面时的速度并不会很大. 假若没有空气阻力，冰雹落到地面时的速度将会快得可怕. 同学们不妨计算一下，若不计空气阻力，从 5000m 高空

落下的冰雹，到地面时速度可达到大约每秒313米，这比汽枪子弹的出膛速度快大约3倍．想一想，这场冰雹该是一场多大的灾难呀！

参考文献： [68]，p. 317.

117、陨石的质量

当陨石穿过大气层向地面高速坠落时，陨石表面与空气摩擦所产生的高热使陨石的质量不断挥发．试验表明，陨石挥发的速度与陨石的表面积成正比．若假设陨石是质量均匀的球体，试求出陨石的质量 m 关于时间 t 的函数表达式．

解： 设 t 时刻陨石的半径为 $r(t)$，质量为 $m(t)$，表面积为 $s(t)$．由题设可知

$$s(t)=4\pi r^2(t)$$

$$m(t)=\rho\frac{4}{3}\pi r^3(t)$$

消去 $r(t)$ 后，$s(t)=4\pi\left[\frac{3m(t)}{4\pi\rho}\right]^{2/3}$

根据题意

$$\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t}=-ks(t)=-4\pi k\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{2/3}\cdot[m(t)]^{2/3}=-c[m(t)]^{2/3}$$

即 $m(t)$ 满足微分方程：$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-cm^{2/3}$，其中 $c=4\pi k\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{2/3}$．由分离变量法计算可得

$$3[m(t)]^{1/3}=-ct+Q$$

$$m(t)=\left[\frac{Q-ct}{3}\right]^3$$

若陨石到达地面的时刻为 t_0，此时陨石的质量为 m_0，据此初始导件可求出 Q：

$$Q=3m_0^{1/3}+ct_0$$

代入(1),求出 $m(t)$的表达式为

$$m(t)=\left[m_0^{1/3}+\frac{c}{3}(t_0-t)\right]^3$$

其中 $c=4\pi k\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{2/3}$.

参考文献: [29],p.18.

118、马尔萨斯人口方程

英国人口学家马尔萨斯(Malthus, 1766—1834)根据百余年的人口统计资料,于1798年提出了人口指数增长模型.他的基本假设是:单位时间内人口的增长量与当时的人口总数成正比.若已知 $t=t_0$ 时的人口总数为 x_0,试根据马尔萨斯假设确定出时间 t 与人口总数 $x(t)$之间的函数关系.根据我国国家统计局1990年10月30日发表的公报,1990年7月1日我国人口总数为11.6亿,过去8年的年人口平均增长率为14.8‰.若今后的年增长率保持这个数字,试用马尔萨斯方程预报2000年我国的人口总数.

解: 记时间 t 时的人口总数为 $x(t)$.设单位时间内人口的增长量与当时人口总数之比为 r,r 是与时间无关的常数.根据马尔萨斯假设,

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=r\cdot x(t)$$

令 $\Delta t\to 0$,得到下述微分方程:

$$\begin{cases}x'(t)=rx(t)\\x(t_0)=x_0\end{cases}\tag{1}$$

这是一个可分离变量方程,容易解出方程满足初始条件的解为

$$x(t)=x_0e^{r(t-t_0)}\tag{2}$$

利用(2)式,将 $t=2\,000$, $t_0=1\,990$, $r=0.0148$ 代入,可预报出 2000 年我国的人口总数为

$$x(2000)=11.6\times e^{0.0148(2000-1990)}\approx 13.45(亿)$$

思考题: 当 $r\ll 1$ 时, $e^r\approx 1+r$. 将 $e^r\approx 1+r$ 代入方程(2),可得 $x(t)=x_0(1+r)^{(t-t_0)}$. 当 t 取年做单位,且取为正整数时,可写为 $x(k)=x_0(1+r)^{k-k_0}$. 试解释此预报公式的意义,并用此式预报 2000 年我国的人口总数($x(2000)=13.44$ 亿).

参考文献: [65],p.13.

119、椭圆形办公室的声学特性

建筑师欲设计一个特殊的办公室,办公室的边界形状是一条光滑的封闭曲线.设计要求是:当主人坐在室内 P 处与坐在 Q 处的客人交谈时,他所发出的声音应该同时聚焦到 Q 点,使谈话可以听得最清楚.已知 P, Q 相距 $2c$,试求出此办公室的边界曲线方程.

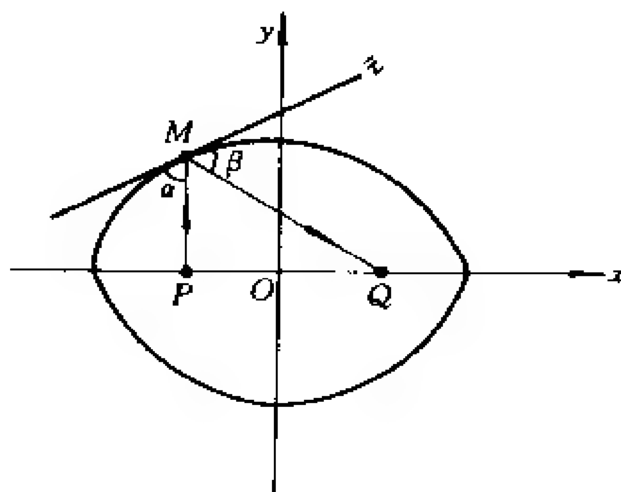


图 119　椭圆形办公室中声音的传播

解：以 PQ 为 x 轴、PQ 的中垂线为 y 轴建立坐标系，如图 119 所示. P,Q 的坐标分别是 $P(-c,0)$，$Q(c,0)$. 设 $M(x,y)$是边界曲线上任意一点，在 M 点处曲线的切线方向记为 $\vec{\tau}$，$\vec{\tau}=\{1,y'\}$. 又记 $\overrightarrow{PM}=(x+c,y)$，$\overrightarrow{MQ}=(c-x,-y)$

$\vec{\tau}$ 与 $\overrightarrow{PM}$ 的夹角记为 α(入射角)，

$\vec{\tau}$ 与 $\overrightarrow{MQ}$ 的夹角记为 β(反射角)，

根据反射定律，入射角与反射角相等，即

$$\cos\alpha=\cos\beta$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{\tau}\cdot\overrightarrow{PM}}{|\vec{\tau}||\overrightarrow{PM}|}=\frac{(x+c)+yy'}{|\vec{\tau}|\sqrt{(x+c)^2+y^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{\vec{\tau}\cdot\overrightarrow{MQ}}{|\vec{\tau}||\overrightarrow{MQ}|}=\frac{(c-x)-yy'}{|\vec{\tau}|\sqrt{(c-x)^2+y^2}}$$

由反射定律可得下述微分方程：

$$\frac{(x+c)+yy'}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}=\frac{(c-x)-yy'}{\sqrt{(c-x)^2+y^2}}$$

变形后

$$\frac{(x+c)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}=\frac{(c-x)\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y}{\sqrt{(c-x)^2+y^2}} \tag{1}$$

(1)是全微分方程，可将其凑成全微分形式：

$$\frac{\mathrm{d}[(x+c)^2+y^2]}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}=-\frac{\mathrm{d}[(c-x)^2+y^2]}{\sqrt{(c-x)^2+y^2}}$$

即
$$\mathrm{d}\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\mathrm{d}\sqrt{(c-x)^2+y^2}=0 \tag{2}$$

(2)的通解为

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \tag{3}$$

整理可得 $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$

令 $a^2-c^2=b^2$，得到通解

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

因此,办公室的形状应为椭圆.再考虑声音传播的路程:

$$s=|PM|+|MQ|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

由(3)可知 s 恒等于 $2a$,即经各方向反射后的声音会同时到达 Q 点.

从上述计算和分析可以看出,椭圆形办公室具备了良好的声学特性,难怪美国总统要采用椭圆形办公室呢!

120、化工车间的通风问题

由于化工生产过程中,经常要排出一些不利于环境的物质.为了保持车间内的环境卫生,必须通入大量的新鲜空气,这就是通风问题.

设有一个 $30\times30\times12\mathrm{m}^3$ 的车间,其中空气中含有 0.12% 的 CO_2,如需要在 10 分钟后 CO_2 的含量不超过 0.06%.(设新鲜空气中 CO_2 的含量为 0.04%),问每分钟应通入多少 m^3 的新鲜空气?

解: 引入下列符号:

y—时间 t 时 CO_2 的浓度;

a—通入的空气量[$\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$];

v—车间的体积[m^3];

y_0—CO_2 的初浓度;

g—新鲜空气 CO_2 的浓度.

解决这个问题主要依据下列两个物质平衡式:

增量 = 加入量 − 排出量; (1)

流进(或排出)量 = 流进(或排出)速度 × 浓度 × 时间. (2)

现在考虑在时间间隔[t,$t+\mathrm{d}t$]内 CO_2 的进入量与排出量.

由(2)式知

$$CO_2\text{ 的进入量} = ag\mathrm{d}t,$$
$$CO_2\text{ 的排出量} = ay\mathrm{d}t.$$

在瞬间 t，CO_2 的总量等于 vy；在瞬间 $t+\mathrm{d}t$，CO_2 的总量等于 $v(y+\mathrm{d}y)$. 所以在 $\mathrm{d}t$ 这段时间内，CO_2 的增量为 $v(y+\mathrm{d}y)-vy=v\mathrm{d}y$.

根据上述分析，由(1)式可得

$$v\mathrm{d}y = ag\mathrm{d}t - ay\mathrm{d}t$$

或
$$v\mathrm{d}y = a(g-y)\mathrm{d}t$$

即
$$\frac{\mathrm{d}y}{y-g} = -\frac{a}{v}\mathrm{d}t \tag{3}$$

上述方程是一阶变量可分离方程. 显然初始条件是 $y\big|_{t=0}=y_0$. 容易求解得

$$y=(y_0-g)\mathrm{e}^{-\frac{a}{v}t}+g \tag{4}$$

上式就是这个车间中空气中 CO_2 的浓度 y 与时间 t 的函数关系.

从(4)式可解出 a，得

$$a=-\frac{v}{t}\ln\frac{y-g}{y_0-g} \tag{5}$$

将下列数值：

$v=10\ 800$, $t=10$, $y=0.0006$, $y_0=0.0012$,

$g=0.0004$.

代入(5)式，得

$$a=-1\ 080\ln\frac{1}{4}=1500[\mathrm{m}^3/\mathrm{min}]$$

也就是说每分钟应通入 1 500[米^3]的新鲜空气，就能在 10 分钟后，使车间内的 CO_2 含量不超过 0.06%.

实际上所需的新鲜空气量，比上面的数要小. 因为新鲜空气并

不是象假设那样很快地与混浊空气混和，而是逐步地与混浊空气混和，并且在很大程度是将它排挤出去的.

参考文献： [32],p.78～80.

121、如何确定商品价格浮动的规律

设某种商品的供给量 Q_1 与需求量 Q_2 是只依赖于价格 P 的线性函数，并假定在时间 t 时价格 $P(t)$ 的变化率与这时的过剩需求量成正比. 试确定这种商品的价格随时间 t 的变化规律.

解： 设

$$Q_1 = -a + bP \tag{1}$$

$$Q_2 = c - dP \tag{2}$$

其中 a、b、c、d 都是已知的正常数. (1)式表明供给量 Q_1 是价格 P 的递增函数；(2)式表明需求量 Q_2 是价格 P 的递减函数.

当供给量与需求量相等时，由(1)与(2)求出平衡价格为

$$\overline{P} = \frac{a+c}{b+d}$$

容易看出，当供给量小于需求量时，即 $Q_1 < Q_2$，价格将上涨. 这样市场价格就随时间的变化而围绕平衡价格 $\overline{P}$ 上下波动. 因而，我们可以设想价格 P 是时间 t 的函数 $P = P(t)$.

由假定知道，$P(t)$ 的变化率与 $Q_2 - Q_1$ 成正比，即有

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \alpha(Q_2 - Q_1)$$

其中 α 是正的常数，将(1)与(2)代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} + kP = h \tag{3}$$

其中 $k = \alpha(b+d)$，$h = \alpha(a+c)$，都是正的常数.

(3) 式是一个一阶线性微分方程. 求通解如下：

$$P = \mathrm{e}^{-\int k\mathrm{d}t}\left[\int h\mathrm{e}^{\int k\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + c\right]$$

$$=e^{-kt}\left[\frac{h}{k}e^{kt}+c\right]$$

$$=ce^{-kt}+\frac{h}{k}=ce^{-kt}+\overline{P}$$

如果已知初始价格 $P(0)=P_0$，则(3)式的特解为：

$$P=(P_0-\overline{P})e^{-kt}+\overline{P}$$

上式即为商品价格随时间的变化规律.

参考文献： [7], p.409～410.

122、火箭的速度与高度是如何确定的

一枚原先静止的火箭从地面垂直向上发射.设在时间 t 时火箭加上尚未燃去的燃料的总质量为 M，质量耗失的变化率 $\dot{m}$ 为常数；并设燃烧生成物的脱离速度 v_e 也是常数.试求在时间 t 时火箭的速度与高度(取坐标轴 y 正向朝上).

一个物体在运动过程中可能获得质量或丧失质量.如雪崩块、冰河与降落的雨点都是我们所熟悉的实例.太阳每秒约损失四百万吨质量，而这对各行星的轨道并没有产生可测量的效应，因此可忽略不计.但在研究火箭的飞行时，我们就必须把因燃料消耗而引起的质量变化考虑进去.

考虑运动过程中质量有变化的问题时，牛顿第二定律已不再能作为推导关于运动的微分方程的基础.代替它的是下述的动量原理，这个原理是：对某一个动力系统 S 来说，S 的动量对时间的变化率加上动量从 S 转移出去的速率等于所有作用在 S 上的外力的矢量和.

现在根据上述的动量原理来建立运动方程.

设 M 为一物体在时间 t 时质量，而 v 是它的速度，这样 Mv 就是它在时间 t 时的动量.设 $\dot{m}$ 为质量耗失的变化率，并设 v_e 为

脱离速度，亦即质点离开这一物体时的相对速度．这些质点相对于某一固定坐标系统的速度是 $v-v_e$．

动量原理应用到这样一个运动物体上，就得到了方程：

$$\frac{\mathrm{d}(Mv)}{\mathrm{d}t}+\dot{m}(v-v_e)=F \tag{1}$$

其中 F 代表所有作用在这质量变化着的物体上的外力之和．

根据 $\dot{m}$ 的定义，可得

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=-\dot{m} \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式，得

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}+\dot{m}(v-v_e)=F$$

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-\dot{m}v+\dot{m}v-\dot{m}v_e=F$$

即

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F+\dot{m}v_e \tag{3}$$

现在来解决开头提出的问题．首先建立火箭的运动方程．

由于 $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=-\dot{m}$，所以 $M=c-\dot{m}t=M_0-\dot{m}t$．

其中 M_0 表示 M 的初值．又知 $F=-Mg=(\dot{m}t-M_0)g$（注意到，重力与 y 轴正向相反，并不计空气阻力）．所以由方程(3)，得

$$(M_0-\dot{m}t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(\dot{m}t-M_0)g+\dot{m}v_e$$

即

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-g+\frac{\dot{m}v_e}{M_0-\dot{m}t} \tag{4}$$

方程(4)就是火箭的飞行速度的微分方程．

现在来求解方程(4)，这个方程是变量可分离方程．由初始条件 $v\big|_{t=0}=0$，所以

$$v=-gt-v_e\ln\frac{M_0-\dot{m}t}{M_0} \tag{5}$$

对(5)式两边再积分，并注意到 $y\Big|_{t=0}=0$，得

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+v_e\left(t+\frac{M_0-\dot{m}t}{\dot{m}}\ln\frac{M_0-\dot{m}t}{M_0}\right) \tag{6}$$

(5)、(6)两式只有当 $M_0-\dot{m}t>0$ 时才有意义．而这与实际情况总是符合的，因为 M 不可能减少到零．

参考文献： [34]，p.190－193.

123、液体旋转的角速度是如何确定的

分液离心机操作时，为了使液体达到一定的高度，需要有一定的旋转角速度．设要达到高度 z_1，问液体的旋转角速度 ω 应为多大？

解： 在分液离心机中，液体以等角速度 ω 围绕着圆筒的轴而旋转（如图123）．取圆筒的轴为 z 轴，并令 z 轴垂直向上．取 z 轴与圆筒底的交点为坐标原点．于是，位于圆筒底部平面中的 X 轴和 Y 轴也在此点相交．显然，液体的表面是一个旋转曲面，这就是说在通过旋转轴所作的这个表面的每一个垂直截面中，均得到同样的曲线．因此，只需取这种截面中的任一个来加以研究，就可得到分液离心机中液面的方程．有了液面方程就可以得到为使液体达到高度 z_1 所应有的转动角速度 ω 的值．

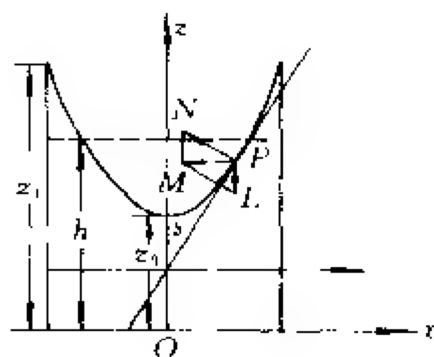


图 123　分液离心机中的液面图

现讨论以 XZ 坐标平面截割旋转面所得到的断面，并求出这个断面上任意点 $P(x,z)$ 的切线斜率．位于 P 点的质点 Q 上，作

用有两种力:(1)重力 mg,垂直向下,以矢量 $\overrightarrow{PL}$ 表示;(2)液体的压力,垂直作用于液体的表面,以 $\overrightarrow{PN}$ 表示.后一个力的数值为未知,但已知 $\overrightarrow{PL}$ 与 $\overrightarrow{PN}$ 的合力,这是因为质点 Q 沿着半径为 x 的圆周作匀速转动,所以它的加速度 $\overrightarrow{PM}$ 的方向向着中心,并且大小等于 $m\omega^2 x$.这样在已知合力和一个分力的方向及大小后,即可求出另一分力——压力的方向及大小.我们对压力的大小并无兴趣,但是借助压力 $\overrightarrow{PN}$ 的方向可以立刻确定垂直于 $\overrightarrow{PN}$ 的切线方向.这样就可以定出切线与 x 轴所成的角 α.具体过程如下:

在三角形 MPN 中,角 N 等于 α.从这个三角形可以求出:

$$\frac{dz}{dx}=\text{tg}\alpha=\frac{|\overrightarrow{MP}|}{|\overrightarrow{MN}|}=\frac{m\omega^2 x}{mg}=\frac{\omega^2 x}{g}$$

对上述方程 $\frac{dz}{dx}=\frac{\omega^2 x}{g}$ 两端积分,得

$$z=\frac{\omega^2 x^2}{2g}+C$$

因为 $x=0$ 处,坐标 $z=z_0=os$,于是 $C=z_0$,这时

$$z-z_0=\frac{\omega^2 x^2}{2g} \tag{1}$$

方程(1)就是旋转曲面断面的方程式,它是抛物线方程.

下面导出液面的曲面方程.由于这个曲面是由 XZ 平面上的抛物线(1)绕 z 轴旋转而得到的,所以只要在方程(1)中的 x 代以 $\sqrt{x^2+y^2}$(此值表示平行于 XY 坐标面的平面截割抛物面所得圆周的半径),即可得到液体表面的方程.于是这个旋转抛物面的方程是.

$$z-z_0=\frac{\omega^2(x^2+y^2)}{2g} \tag{2}$$

有了液面方程(2),容易得到液体旋转的角速度 ω.

在容器器壁处,液体达到的高度是:

$$z_1=z_0+\frac{r^2\omega^2}{2g} \tag{3}$$

式中的 r 是离心机的半径，由于点 (x,y,z) 在容器器壁上，所以 $x^2+y^2=r^2$. 现在来求液体达到高度 z_1 时所需要的旋转角速度 ω.

由(3)式，得

$$\omega=\frac{\sqrt{2g(z_1-z_0)}}{r} \tag{4}$$

上式中的 z_0 与液体静止时的高度 h 及 z_1 可以证明有如下关系：

$$z_0=2h-z_1 \qquad (\text{证明见后}) \tag{5}$$

将(5)式代入(4)，即可得到

$$\omega=\frac{2}{r}\sqrt{g(z_1-h)} \tag{6}$$

(6)式就是为了使液体达到定高度 z_1，液体所应有的角速度值.

关于(5)式的证明：

因为静止时的液体体积 v 是

$$v=v_1-v_2 \tag{7}$$

式中 $v_1=\pi r^2 z_1$，v_2 是曲面(2)与平面 $z=z_0$、$z=z_1$ 之间的液体体积，其值可计算如下：

由旋转体的体积公式，有

$$v_2=\pi\int_{z_0}^{z_1}x^2\mathrm{d}z=\pi\int_{z_0}^{z_1}\frac{2g(z-z_0)}{\omega^2}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\pi g}{\omega^2}(z_1-z_0)^2$$

又因为 $v=\pi r^2 h$，所以由(7)式，得

$$\pi r^2 h=\pi r^2 z_1-\frac{\pi g}{\omega^2}(z_1-z_0)^2$$

即

$$hr^2=z_1 r^2-\frac{g}{\omega^2}(z_1-z_0)^2 \tag{8}$$

由(3)式知 $r^2=\dfrac{2g(z_1-z_0)}{\omega^2}$，将它代入(8)式，得

$$h\frac{2g(z_1-z_0)}{\omega^2}=z_1\frac{2g(z_1-z_0)}{\omega^2}-\frac{g}{\omega^2}(z_1-z_0)^2$$

即 $$2h=2z_1-(z_1-z_0)$$

所以 $$z_0=2h-z_1,$$ 证毕.

参考文献： [32],p.43～46.

124、如何计算贮水槽的水位

如图 124 所示，在半径为 R[米]的圆筒形贮水槽中，开始加水到 H[米]. 由半径为 r_1[米]的给水管以每秒 v_1 米的流速给水；同时，由位于槽底部的半径为 r_2[米]的排水管排水. 已知排水速度服从托里斯利(Torricelli)原理(即流速等于$\sqrt{2gh}$，其中 g 是重力加速度，h 是水位的高度). 试求时间 t 时的水位 y.

解： 在任意时刻 t(其相应的水位为 y)的微小时间间隔 dt 内，贮槽蓄存(或减少)的水量等于给水量与排水量之差. 也就是说：

$$蓄积水量=供给水量-排出水量 \quad (1)$$

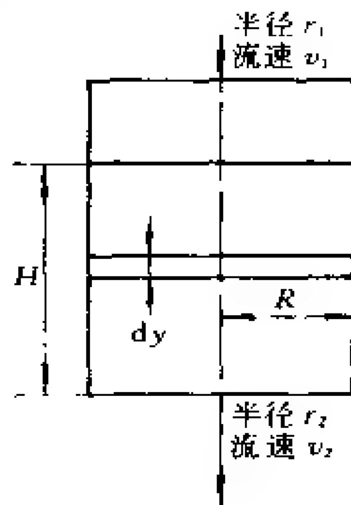


图 124 贮水槽的剖面图

由题意，知

$$蓄积水量=dv=\pi R^2 dy$$

$$供给水量=\pi r_1^2 v_1 dt$$

$$排出水量=\pi r_2^2 v_2 dt=\pi r_2^2\sqrt{2gy}\,dt$$

所以根据(1)式，得到变量可分离方程

$$R^2 dy=(r_1^2 v_1-r_2^2\sqrt{2gy})dt \quad (2)$$

两边积分，得

$$\frac{1}{R^2}\int dt + C = \int \frac{dy}{r_1^2 v_1 - r_2^2\sqrt{2g}y^{\frac{1}{2}}} \tag{3}$$

(3)式右端的积分(记作 I)可通过换元积分法进行计算,令 $a = r_1^2 v_1$, $b = \sqrt{2g}r_2^2$,作换元 $Y = a - by^{\frac{1}{2}}$,则 $dy = \frac{2}{b^2}(Y - a)dY$. 于是

$$I = \int \frac{dy}{a - by^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{b^2}\int \frac{Y - a}{Y}dY = \frac{2}{b^2}[Y - a\ln Y] + C_1$$

$$= \frac{2}{(\sqrt{2g}r_2^2)^2}[r_1^2 v_1 - \sqrt{2g}r_2^2 y^{\frac{1}{2}} - r_1^2 v_1 \ln(r_1^2 v_1 - \sqrt{2g}r_2^2 y^{\frac{1}{2}})] + C_1$$

所以得到方程(2)的通解

$$\frac{t}{R^2} + C = \frac{2}{(\sqrt{2g}r_2^2)^2}[r_1^2 v_1 - \sqrt{2g}r_2^2 y^{\frac{1}{2}} - r_1^2 v_1 \ln(r_1^2 v_1 - \sqrt{2g}r_2^2 y^{\frac{1}{2}})] \tag{4}$$

由初始条件 $y\big|_{t=0} = H$,所以

$$C = \frac{2}{(\sqrt{2g}r_2^2)^2}[r_1^2 v_1 - \sqrt{2g}r_2^2 H^{\frac{1}{2}} - r_1^2 v_1 \ln(r_1^2 v_1 - \sqrt{2g}r_2^2 H^{\frac{1}{2}})] \tag{5}$$

将(5)式代入(4)式,整理后得:

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{R^2}{r_2}(H^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}) + \frac{v_1}{g}\cdot\frac{R^2 r_1^2}{r_2^2}\cdot\ln\left(\frac{r_1^2 v_1 - \sqrt{2g}r_2^2 H^{\frac{1}{2}}}{r_1^2 v_1 - \sqrt{2g}r_2^2 y^{\frac{1}{2}}}\right)$$

这个公式给出了伴有给水的圆筒形贮槽排水问题中时间 t 与水位 y 的函数关系式.

另外,由(2)式得

$$\frac{dy}{dt} = \frac{r_1^2 v_1 - r_2^2\sqrt{2gy}}{R^2} \tag{6}$$

此式表示水位的变化速度. 它的正或负,表示水位上升或下降. 由

于 R 是常数，所以可根据($r_1^2 v_1 - r_2^2\sqrt{2gy}$)的正或负，也就是根据给水速度和排水速度的大小来确定水位的上升或下降. 当两者相等，即 $r_1^2 v_1 = r_2^2\sqrt{2gy}$ 时，$\frac{dy}{dt}=0$，就是说水位 y 达到 $y^* = r_1^4 v_1^2/2gr_2^4$ 这个高度时就不变了.

思考题：(1)如果不伴有给水，而其它条件相同，这时应如何建立时间 t 与水位 y 之间的微分方程；(2)如果贮槽是倒圆锥形贮槽，如何处理伴有恒速给水的排水问题?

参考文献： [33],p.204～206.

125、如何求物料干燥所需的时间

干燥是化工中常见的单元操作，干燥过程就是把含有较多水份的物料经过处理变成含有较少水份的物料的物理过程. 现在讨论下面的干燥动力学问题.

将固体物料放在一直径为 1.5 米、长为 15 米的转筒干燥器中用空气来干燥. 沿转筒全部长度方向都装有物料，且物料装至转筒横断面的三分之一. 物料以恒定的速度进入器内，在原始的物料中，干物质与水之比等于 2，而干燥的后的物料中，干物质与水之比等于 10. 假定被干燥物料的体积和其中所含水量之间存在线性关系. 进入干燥器内的物料重度等于 500[kg/m³]，而最后成品的重度等于 330[kg/m³]. 设干燥器每小时能出产品 220[kg]，并假定干燥速度和含水量成正比. 试求干燥所需的时间.

解： 从所给的条件可知，以干物质计算干燥器的生产能力等于 200[kg/h](由于产品是 220 千克，其中干物质为 200 千克，水为 20 千克). 由于过程是稳定的，所以每小时通过干燥器的每一个断面的干物质也是这个数量.

设 v 为每千克被干燥物料的体积，m 为其中所含水分的重

量，则根据假设 v 是 m 的线性函数，得

$$v = am + b$$

其中 a 和 b 是常数.

再设 w 是物料通过某一断面时的速度，这个断面离装料口的距离为 x，F 是物料的横断面的面积，由题意知它等于干燥器横断面积的 $\frac{1}{3}$，显然物料的密度 $\rho = \frac{1}{v}$. 所以每小时经过干燥器任何断面的物料重量等于

$$w\rho F = 200[\mathrm{kg/h}]$$

在上式中以 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 代替 w，以 $\frac{1}{am+b}$ 代替 ρ，我们得到下面微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{200}{F}(am+b) \tag{1}$$

这个方程式中含有 x，t 和 m 三个变量，由题意知，干燥速度和含水量成正比，这样可以列出另一个微分方程

$$-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = km \tag{2}$$

在干燥器中的空气量很大，因此其中所含的水分量可以看作为是不变的. 现在利用物料在干燥器进口与出口的运动速度的数据，来求系数 a 与 b.

从题意可知，每小时进入干燥器的原料等于 200×3[千克]（因其中干物质为 200 千克，水为 400 千克）. 又因为这物料的重度等于 $500[\mathrm{kg/m^3}]$，则其体积等于 $(200\times 3)\frac{1}{500}[\mathrm{m^3/h}]$（因为重度 $=\frac{\text{重量}}{\text{体积}}$）.

另外，由于转筒的直径 $d = 1.5[\mathrm{m}]$，所以物料所占据的干燥器的横断面积等于

$$\frac{\pi}{4}d^2 \times \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}(1.5)^2 \cdot \frac{1}{3} \approx \frac{0.785 \times 2.25}{3}$$

由于物料进入干燥器的运动速度等于每小时进入干燥器的原

料体积除以物料所占据的干燥器的横断面积，所以进入干燥器的运动速度是

$$(200\times3)\frac{1}{500}\div\frac{0.785\times2.25}{3}=\frac{200\times3\times3}{500\times0.785\times2.25}\approx2.0[\mathrm{m/h}]$$

同理可以得到物料离开干燥器的运动速度是

$$\frac{220}{330}\div\frac{0.785\times2.25}{3}=\frac{220\times3}{330\times0.785\times2.25}\approx1.13[\mathrm{m/h}]$$

因为物料进口处与出口处的 m 值分别为 2 与 0.1，将这些数值代入方程(1)，得

$$\begin{cases}2=\dfrac{200\times3}{0.785\times2.25}(2a+b)\\[2ex]1.13=\dfrac{200\times3}{0.785\times2.25}(0.1a+b)\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}2=340(2a+b)\\1.13=340(0.1a+b)\end{cases}$$

解上面方程组，得

$$a=0.00135,b=0.00319$$

这时我们得到微分方程

$$\frac{dx}{dt}=340(0.00135m+0.00319) \tag{3}$$

另外，解方程(2)，由 $t=0$ 时 $m=m_0$，得

$$m=m_0e^{-kt} \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式，得

$$\frac{dx}{dt}=340(0.00135m_0e^{-kt}+0.00319)$$

积分上式，得

$$x=340\left(0.00319t-\frac{0.00135m_0}{k}e^{-kt}\right)+C \tag{5}$$

由初始条件：$x\Big|_{t=0}=0$，因而

$$C = 340\frac{0.00135m_0}{k}$$

将上式代入(5)式,得

$$x = 340\left[0.00319t + \frac{0.00135m_0}{k}(1 - e^{-kt})\right] \qquad (6)$$

这个公式给出了干燥器长度 x 与干燥时间 t 的函数关系.

从公式(4),得

$$k = \frac{1}{t}\ln\frac{m_0}{m} = \frac{1}{t}2.303\lg\frac{2}{0.1} \approx \frac{3.0}{t}$$

将上面的 k 值代入(6)式,得

$$x = 340\left[0.00319t + \frac{0.00135 \times 2t}{3.0}(1 - e^{-3})\right]$$

当 $x = 15$ 时,解出 t,容易得到干燥所需时间为

$$t \approx 11(\mathrm{h})$$

参考文献: [32],p.83~85.

126、能抓住走私船吗

如图 126,位于原点 O 海岸的我缉私船,发现在 Ox 轴上 A 点处的走私船,正以其最大速度 v_0 沿平行于 Oy 轴的直线逃窜.我缉私船迅速追踪,且目标始终对准走私船,且其速度为 $2v_0$,试问我缉私船多长时间内可抓住走私船?

解: 为简单起见,设 $|OA| = 1$,并设当缉私船追到 $P(x,y)$ 时,走私船在其航线上的 $Q(1,\bar{y})$处.因为缉私船的目标始终对准走私船,所以 PQ 应与缉私船的追踪曲线 $y = f(x)$ 相切,于是有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\bar{y} - y}{1 - x}$$

即

$$\bar{y} - y = (1 - x)\frac{dy}{dx}$$

上式两端对 x 求导,得

$$\frac{d\bar{y}}{dx}-\frac{dy}{dx}=(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}$$

即

$$\frac{d\bar{y}}{dx}=(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} \tag{1}$$

由题意知,$\frac{d\bar{y}}{dt}=v_0$,$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=2v_0$

所以$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=2\frac{d\bar{y}}{dt}$,两边同除以$\frac{dx}{dt}$,得

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=2\frac{d\bar{y}}{dx},\text{即}\frac{d\bar{y}}{dx}=\frac{1}{2}\sqrt{1+(y')^2}$$

将上式代入(1)式,得

$$\sqrt{1+(y')^2}=2(1-x)y'' \tag{2}$$

这是一个形如 $y''=f(x,y')$ 的可降阶方程,其初始条件是 $y\big|_{x=0}=0, y'\big|_{x=0}=0$.

设 $y'=P$, $y''=\frac{dP}{dx}$, 则(2)化为 $\frac{dP}{\sqrt{1+P^2}}=\frac{dx}{2(1-x)}$,

两边积分,化简得

$$P+\sqrt{1+P^2}=C_1(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

由 $P\big|_{x=0}=0$, 得 $C_1=1$

所以

$$P+\sqrt{1+P^2}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

由于

$$-P+\sqrt{1+P^2}=(P+\sqrt{1+P^2})^{-1}$$
$$=(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

所以 $P=\frac{1}{2}[(1-x)^{-\frac{1}{2}}-(1-x)^{\frac{1}{2}}]$

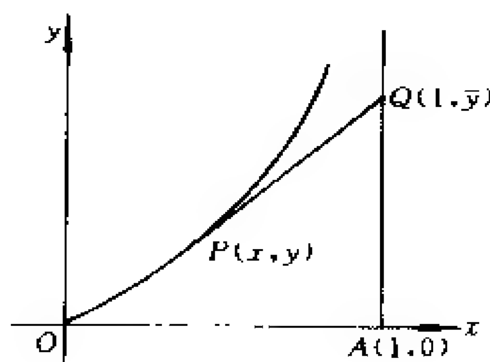


图 126 追踪曲线

即
$$dy=\frac{1}{2}[(1-x)^{-\frac{1}{2}}-(1-x)^{\frac{1}{2}}]dx$$

对上式两端积分，得

$$y=-(1-x)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+C$$

由于 $y\Big|_{x=0}=0$，所以 $C=\frac{2}{3}$

所以得到追踪曲线方程为

$$y=-(1-x)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3} \tag{3}$$

在上式中，如果令 $x=1$，则 $y=\frac{2}{3}$. 也就是说，当走私船驶至$(1,\frac{2}{3})$处正好被我缉私船抓获.

思考题：当缉私船的速度与走私船的速度相同时能否抓获走私船，为什么？

127、动物数量能够预测吗

动物繁殖是一个非常复杂的问题，但是如果把影响繁殖的许多次要因素忽略掉或简单化，我们仍然可以用微分方程来描述动物繁殖的近似规律，从而预测动物的未来数量.

现考虑一种与外界完全隔绝的某种动物，这里所说的与外界完全隔绝是指它们中间除了本族的出生和死亡之外，既无迁出也无迁入. 设在 t 时间内这一种动物的数目为 N，并设它们的出生率和死亡率分别为 n 与 m. 假定它们出生数与死亡数都和 t 时的动物数及时间成正比. 现在讨论动物数 N 与时间 t 之间的函数关系.

解： 设$[t,t+dt]$时间间隔内动物数的增量为 dN，由题意，

在 $\mathrm{d}t$ 时间内这类动物的出生量与死亡量分别为 $nN\mathrm{d}t$ 与 $mN\mathrm{d}t$.根据

$$增量 = 出生量 - 死亡量$$

容易得到
$$\mathrm{d}N = nN\mathrm{d}t - mN\mathrm{d}t \tag{1}$$

即
$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}N}{(n-m)N} \tag{1'}$$

如果初始条件为 $N\big|_{t=0} = N_0$,解上变量可分离方程,

得
$$\int_0^t \mathrm{d}t = \int_{N_0}^{N} \frac{\mathrm{d}N}{(n-m)N}$$

则
$$t = \frac{1}{n-m}\ln\frac{N}{N_0}$$

或写成
$$N = N_0 e^{\frac{t}{n \quad m}} \tag{2}$$

从上式看出,如果 $n > m$,则动物数量将无限地增加;如果 $m > n$,则动物数量将逐步减少,趋于灭亡.这样的结论是非常天真的,事实决不会如此简单.为此生物学家及数学家根据统计数据对 n、m 作了修正,使结果能更符合事实.比如,设

$n = a - bN$,$m = p + qN$,式中 a,b,p,q 均为正常数.上面两式说明出生率与死亡率已不再是常数,而是 N 的线性函数,前者随 N 均匀减小,后者随 N 均匀增加.这时方程(1)化为

$$\mathrm{d}N = (a - bN)N\mathrm{d}t - (p + qN)N\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}N = (b+q)N\left(\frac{a-p}{b+q} - N\right)\mathrm{d}t$$

令 $k = b + q$,$l = \dfrac{a-p}{b+q}$,则上式化为

$$\mathrm{d}N = kN(l - N)\mathrm{d}t$$

即
$$k\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}N}{N(l-N)}$$

积分上式$\left(注意到\dfrac{1}{N(l-N)} = \dfrac{1}{l}\left(\dfrac{1}{l-N} + \dfrac{1}{N}\right)\right)$

$$\int_0^t k\mathrm{d}t = \int_{N_0}^{N} \frac{\mathrm{d}N}{N(l-N)}$$

得
$$t = \frac{1}{lk}\left[\ln\frac{N}{l-N} - \ln\frac{N_0}{l-N_0}\right]$$

或
$$N = \frac{lN_0}{N_0 + (l-N_0)e^{-klt}} = \frac{l}{1+\left(\frac{l}{N_0}-1\right)e^{-klt}} \tag{3}$$

其中 N_0 是 $t=0$ 时的动物数，不论初值 N_0 是多少，当 $t\to+\infty$ 时，N 的极限总为 l.

可以用实验的方法对不同的问题象人口的成长、传染病的发生率等来确定(3)式的图形. 这个图形称为逻辑斯谛(Logistic)曲线.

也可以利用(3)式来预测动物的数量. 例如，已知以百万为单位的某种动物在 1890 年时为 13，1940 年时为 50，1990 年时为 122，试预测 2040 年的动物数 N. 在计算时以 50 年为 1 个时间单位，由 $N\Big|_{t=0}=13, N\Big|_{t=1}=50, N\Big|_{t=2}=122$，容易从(3)式得到 $N_0=13, l=195.7, k=8.02\times10^{-3}$. 于是这类动物的繁殖函数是

$$N = \frac{195.7}{1+14.05e^{-1.57t}}$$

当 $t=3$ 代入上式，得

$$N = \frac{195.7}{1+14.05e^{-1.57\times3}} \approx 174(\text{百万})$$

所以 2040 年的动物数量是 174(百万)只.

参考文献： [34], p. 62~63.

128、毛细管中的液体的流速是如何分布的

设液体在毛细管中的流动是稳定流动(即流动速度与时间无

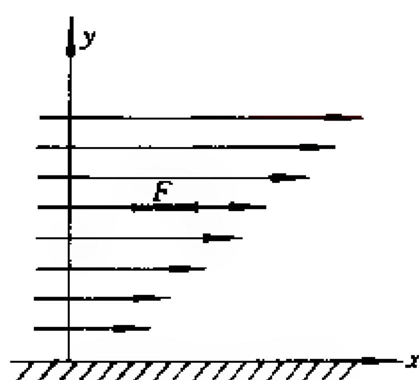


图 128－1　毛细管中液体的流速分布图

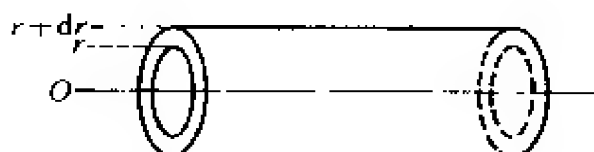


图 128－2　空心圆柱体状毛细管

关，只与位置有关)，管的半径 R 要比长度 L 小得多. 毛细管的管壁上有一层不动的薄膜. 图 128－1 表示毛细管及流动液体的纵剖面，当液体从管壁移向管轴时，液体的流动速度 ω 逐渐增大. 试求液体的流动速度沿着毛细管的半径 r 的分布函数.

解： 可以设想在液体中，和毛细管的轴平行放着一块面积为 F 的平板. 由于各层流体的运动速度不一样，它们之间就产生摩擦力，如平板 F 放在如图 128－1 所示的位置，则上层液体将促使下层液体运动，但同时下层液体将延缓上层液体的运动.

根据牛顿粘性定律，作用于面积 F 上的力 f 等于

$$f=\eta F\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}y} \tag{1}$$

式中 η 是比例常数，即液体的粘度.

现在来讨论空心圆柱体状的液体，此空心圆柱的内半径为 r，外半径为 $r+\mathrm{d}r$. 设它的轴与毛细管的轴相重合(如图 128－2)，因为 $\mathrm{d}r$ 很小，因此可以假定在这个空心圆柱体中的液体分子的

速度是相同的;取圆柱的长度为一个单位.在这个圆柱的内表面 $2\pi r$ 受到下力的作用:

$$f_1 = \eta \cdot 2\pi r \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}$$

其方向与运动方向相同.

在这个圆柱的外表面上受到相反的力的作用,其大小为:

$$f_2 = -\eta 2\pi r \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r} - \mathrm{d}\left(\eta 2\pi r \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}\right)$$

因而两力之和为

$$f_1 + f_2 = -\mathrm{d}\left(\eta 2\pi r \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}\right) = -2\pi\eta\left(r\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r \tag{2}$$

当稳定流动时,摩擦力的大小应当和促使空心圆柱沿着轴流动的力相等.这个促使空心圆柱流动的力决定于压力降,在毛细管中此压力降是线性减小的,因此单位长度的空心圆柱的两端的压力降等于 $P_1 - P_2$.这样推动力就等于

$$2\pi r(P_1 - P_2)\mathrm{d}r \tag{3}$$

所以,由(2)式右端与(3)式相等,得

$$-\eta 2\pi\left(r\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r = 2\pi r(P_1 - P_2)\mathrm{d}r$$

$$r\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r} = -\frac{P_1 - P_2}{\eta}r$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r} = -\frac{P_1 - P_2}{\eta} \tag{4}$$

这是一个可降阶的二阶方程,如果令

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r} = u, \quad \frac{P_1 - P_2}{\eta} = a$$

则方程(4)变为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \frac{u}{r} = -a$$

这是一个一阶线性方程,容易求得

$$u = \frac{c}{r} - \frac{a}{2}r$$

从此可得：

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r} = \frac{C}{r} - \frac{P_1 - P_2}{\eta} \cdot \frac{r}{2}$$

对上式两端积分，可得

$$\omega = C\ln r - \frac{P_1 - P_2}{4\eta}r^2 + C_1$$

因为 $r \to 0^+$ 时，运动速度是一个有限数，所以 $C = 0$. 另外，当 $r = R$ 时，运动速度 $\omega = 0$，所以

$$C_1 = \frac{P_1 - P_2}{4\eta}R^2$$

所以

$$\omega = \frac{P_1 - P_2}{4\eta}(R^2 - r^2) \qquad (6)$$

方程(6)给出了液体的运动速度沿着毛细管半径的分布情况.

利用(6)式可以计算每秒流过毛细管截面的流量 Q，具体过程如下：

考虑$[r, r + \mathrm{d}r]$上圆环面的流量

$$\mathrm{d}Q = \omega(r)\mathrm{d}\sigma = \omega(r)2\pi r\mathrm{d}r$$

所以

$$Q = \int_0^R 2\pi r\omega(r)\mathrm{d}r = \int_0^R 2\pi r \cdot \frac{P_1 - P_2}{4\eta}(R^2 - r^2)\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi(P_1 - P_2)}{2\eta}\int_0^R (R^2 - r^2)r\mathrm{d}r = \frac{\pi}{8}\frac{(P_1 - P_2)R^4}{\eta}.$$

于是在时间 t 内，液体的总流量等于

$$Q_t = \frac{\pi}{8}\frac{P_1 - P_2}{\eta}R^4 t$$

对于长度为 L 的毛细管，则总流量为

$$Q_L = \frac{\pi}{8}\frac{P_1 - P_2}{\eta L}R^4 t \qquad (7)$$

由(7)式，将 η 解出，得

$$\eta = \frac{\pi}{8} \frac{P_1 - P_2}{Q_L L} R^4 t$$

从这个公式又可以确定液体的粘度 η.

参考文献： [32],p.175~177.

129、如何建立固体物质的溶解速度常数的方程式

设有一球形的均匀固体溶解于化学活性的溶液中，并且溶解一克分子的固体物质要消耗一克分子的溶剂.要求列出决定固体物质的溶解速度常数的方程式.

解： 设 r_0 表示在过程开始 $t=0$ 时球的半径，r 表示球在 t 瞬间时的半径. V 表示 1 克分子溶质的体积，x 表示到瞬间 t 时所溶解的溶质的克分子数，a 表示开始时溶剂的克分子数.

在瞬间 t 时的溶解速度与 t 时的球形面积 S 和到瞬间 t 时余留的溶剂量 $a-x$ 成正比，即有

$$\frac{dx}{dt} = kS(a - x) \tag{1}$$

式中的 k 是比例常数，系为所求的溶解速度常数.

由于在瞬间 t 时球的体积等于 $\frac{4}{3}\pi r^3$，则 x 克分子已溶物质的体积为

$$xV = \frac{4}{3}\pi(r_0^3 - r^3)$$

在上式中解出 r，得

$$r = \left(r_0^3 - \frac{3xV}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

于是可得到瞬间 t 时球的表面积 S 如下：

$$S=4\pi r^2=4\pi\left(r_0^3-\frac{3xV}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式，得

$$\frac{dx}{dt}=4\pi k\left(r_0^3-\frac{3xV}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}(a-x)$$

由此得

$$\frac{dx}{\left(r_0^3-\frac{3Vx}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}(a-x)}=4\pi k\,dt \tag{3}$$

为了将方程(3)两边积分，作如下变换：

$$r_0^3=a_0;\frac{3v}{4\pi}=b;a_0-bx=z^3$$

$$a_0-ab=n^3;x=\frac{a_0-z^3}{b};dx=-\frac{3z^2dz}{b}$$

于是(3)式左端化为

$$\frac{dx}{(a_0-bx)^{\frac{2}{3}}(a-x)}=-\frac{3z^2dz}{z^2b(a-x)}=\frac{3dz}{bx-ab}$$

$$=\frac{3dz}{a_0-z^3-a_0+n^3}=\frac{3dz}{n^3-z^3}$$

这样(3)式左端的积分为

$$3\int\frac{dz}{n^3-z^3}=3\int\frac{dz}{(n-z)(n^2+nz+z^2)}$$

$$=\frac{1}{n^2}\int\frac{dz}{n-z}+\frac{1}{n^2}\int\frac{(z+2n)dz}{n^2+nz+z^2}$$

$$=-\frac{1}{n^2}\ln(n-z)+\frac{1}{2n^2}\int\frac{2z+n}{z^2+nz+n^2}dz$$

$$+\frac{3}{2n}\int\frac{dz}{\left(z+\frac{n}{2}\right)^2+\frac{3}{4}n^2}$$

$$=-\frac{1}{n^2}\ln(n-z)+\frac{1}{2n^2}\ln(z^2+nz+n^2)$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{n^2}\text{arc tg}\frac{2z+n}{n\sqrt{3}}+C$$

(3)式的右端积分为 $4\pi kt$. 于是方程(3)两端积分后,得

$$-\frac{1}{n^2}\ln(n-z)+\frac{1}{2n^2}\ln(z^2+nz+n^2)+\frac{\sqrt{3}}{n^2}\text{arc tg}\frac{2z+n}{n\sqrt{3}}+C$$

$$=4\pi kt$$

还原到原来的变量 x,则得:

$$\frac{1}{(a_0-ab)^{\frac{2}{3}}}\Bigg[\ln$$

$$\times\sqrt{\frac{(a_0-ab)^{\frac{2}{3}}+(a_0-ab)^{\frac{1}{3}}(a_0-bx)^{\frac{1}{3}}+(a_0-bx)^{\frac{2}{3}}}{(a_0-ab)^{\frac{1}{3}}-(a_0-bx)^{\frac{1}{3}}}}$$

$$+\sqrt{3}\text{arc tg}\frac{2(a_0-bx)^{\frac{1}{3}}+(a_0-ab)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}(a_0-ab)^{\frac{1}{3}}}\Bigg]+C=4\pi kt \tag{4}$$

由初始条件:$t=0$ 时,$x=0$ 与 $r=r_0$ 可以确定常数 C.

(4)式就是固体物质的溶解速度常数的方程式.若用数值代替方程中的各符号,则容易算出 k 值.

参考文献: [32],p.538~540.

130、血液的流速

图 130 表示血管的一段,其长度为 L.左端的血压为 P_1,右端的血压为 P_2,$P_1>P_2$.设此血管的半径为 R,试求血液的流速.

解: 由于血液流动是连续的稳定流动,因此推动血液前进的力应该等于它所克服的阻力.

考虑半径为 r,长为 L 的一段血柱.推动其前进的力为:

$$F_1=\pi r^2(P_1-P_2),$$

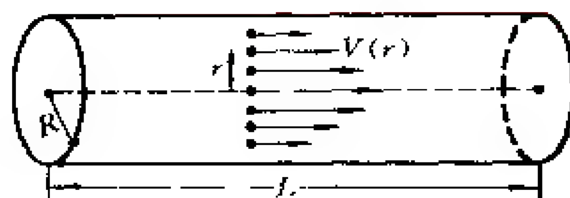


图 130　血管的一段

由粘滞流体力学知识，阻止血液前进的力为：

$$F_2 = -\eta 2\pi r L \frac{dV}{dr}$$

其中 η 为血液的粘滞系数，V 为血液的流速.

令 $F_1 = F_2$，则有如下的微分方程：

$$-\eta 2\pi r L \frac{dV}{dr} = \pi r^2 (P_1 - P_2)$$

即 $dV = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta L} r dr$，两边同时积分.

得：

$$\int_r^R dV = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta L} \int_r^R r dr$$

所以

$$V(R) - V(r) = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta L}(R^2 - r^2) \qquad (1)$$

由于血液的粘滞性，血液在血管中心和边缘的流速是不同的. 在血管横截面上取坐标 r，原点在血管中心，显然 $r = 0$ 处流速最大，$r = R$ 处流速为零，即 $V(R) = 0$，代入(1)式，得：

$$V(r) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$

由上式可看出如下的生理意义：(a)血液的流速与其粘滞系数 η 成反比；(b)血液的流速与血管首端与尾端的压力差成正比；(c)血液的流速与血管半径 R 有关，R 大则流速大，R 小则流速小.

参考文献： [36]，p.275～277.

131、伯努利方程

伯努利方程是能量守恒定律应用到流体上的一种表达形式，下面通过建立理想流体运动的微分方程，沿流线进行积分，推导出伯努利方程.

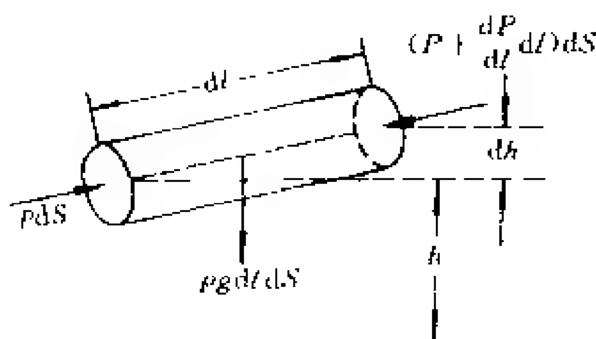


图 131-1　理想流体中一段流管

如图 131-1，考虑理想流体中一段流管，设该段流管长为 dl，截面积为 dS，流体的速度为 v，密度为 ρ，流管左截面处水平高度 h，作用于左截面的压力为 PdS，右截面处水平高度为 $h+dh$，作用于右截面的压力为$(P+\frac{dP}{dl}dl)\cdot dS$，此段流体的重力沿流线方向的分力为 $\rho g dl dS\cos\theta$（θ 为流管的轴线与水平线间夹角），因此作用于 dl 上沿流动方向的合力为：

$$PdS-(P+\frac{dP}{dl}dl)dS-\rho g dl dS\cos\theta$$

$$=-\left(\frac{dP}{dl}+\rho g\cos\theta\right)dl dS$$

根据牛顿第二定律，该合力应等于质量 $\rho dl dS$ 与沿流动方向加速度 $\frac{dv}{dt}$ 的乘积，又因为 $\cos\theta=\frac{dh}{dl}$，因此得

$$-\frac{dP}{dl}-\rho g\frac{dh}{dl}=\rho\frac{dv}{dt}.$$

由于$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dl}\frac{dl}{dt}=v\frac{dv}{dl}$，代入上式，得：

$$-\frac{dP}{dl}-\rho g\frac{dh}{dl}=\rho v\frac{dv}{dl}$$

将上式沿流管积分，得

$$P+\frac{\rho}{2}v^2+\rho gh=\text{常数}$$

或

$$\frac{P}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gh=\text{常数} \tag{1}$$

这就是伯努利方程，其中$\frac{v^2}{2}$是单位质量流体所具有的动能，gh 是单位质量流体所具有的势能，而$\frac{P}{\rho}$则是单位质量流体所具有的压强能，这一项是流体所特有的．所以上式说明：单位质量的理想流体，在同一流管中各处所具有的总能量是相等的．

伯努利方程的应用：

伯努利方程的应用很广，下面利用伯努利方程导出的计算流量的公式，仅是一个方面的应用．

设一水池（图 131－2），在侧壁开一小孔，孔流出的流量等于流进水池的流量，所以水池内水的体积不变，从而水面的高度不变，在这种情况下，流动是稳定的．

设小孔与水面的距离为 h，并假定小孔 2 处的流线是从水面 1 处出发的，在水面处水流速度为 v_1，在小孔处水流速度为 v_2；并且在小孔外及水面上的压强都等于大气压 P_0．将伯努利方程应用到流线 1 到 2 上，可得：

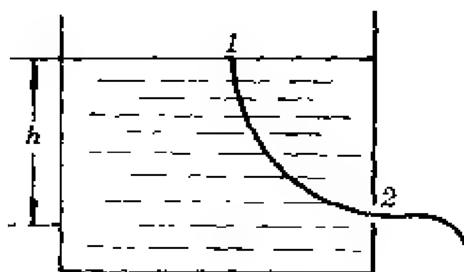


图 131－2　水池示意图

$$P_0+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho gh=P_0+\frac{1}{2}\rho v_2^2$$

由于水面的面积比小孔的面积大很多,可认为 $v_1=0$,由上式可得

$$v_2=\sqrt{2gh} \tag{2}$$

式(2)叫托里拆利公式,与自由落体公式相同,即理想液体从小孔流出时,其流出速度的绝对值等于液体从水面自由落下到孔口的速度绝对值.

参考文献: [42],p.143~145.

132、赤道上需多少颗通讯卫星

计划将一颗通讯卫星送入地球赤道上空的静止轨道.为了保持该卫星对地球的相对静止,该通讯卫星的运动速率,轨道的高度应为多少?欲使赤道上的所有点至少与一颗通讯卫星保持联系,在赤道上需要有多少颗通讯卫星?

解: 如图 132-1 所示,引入极坐标系.将通讯卫星与地球看作质点,根据牛顿第二定律和万有引力定律,卫星的运动方程由下式给出:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=-g\frac{mM}{r^2}\mathbf{e}_r$$

其中 $\boldsymbol{r}=r\mathbf{e}_r$ 表示卫星的位置矢量,m 是卫星的质量,M 是地球的质量,g 是万有引力常数.

通常地,在极坐标系中,对质点运动,加速度为:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta$$

所以运动方程可被写为:

$$(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta=-\frac{gM}{r^2}\mathbf{e}_r$$

等式两边 $\mathbf{e}_r$ 和 $\mathbf{e}_\theta$ 上的分量应分别相等,所以有下列等式:

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\frac{gM}{r^2} \tag{1}$$

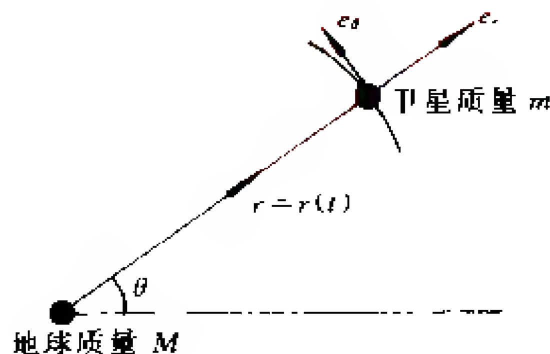


图 132－1　卫星轨道示意图

$$2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=0 \tag{2}$$

对于匀速运动，$\dot{\theta}=$常数，则 $\ddot{\theta}=0$，由(2)式得 $\dot{r}=0$，所以 r 为一个常数，不妨设 $r=a$，即卫星的运动轨迹是一个半径为 a 的圆．$r=a$，则 $\dot{r}=0$，$\ddot{r}=0$，所以由(1)式可得：$a\dot{\theta}^2=\frac{gM}{a^2}$，

即
$$\dot{\theta}=\left(\frac{gM}{a^3}\right)^{1/2} \tag{3}$$

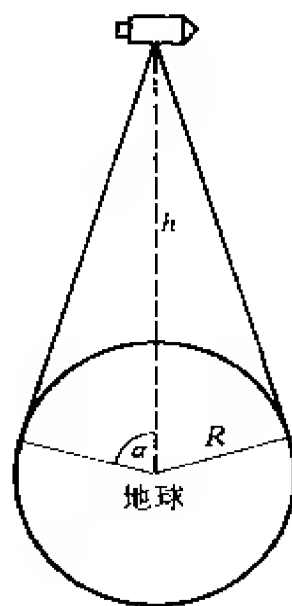


图 132－2　卫星覆盖的范围

地球自转一圈所用的时间为 24 小时，那么通讯卫星绕静止轨道一圈所用的时间 T 也是 24 小时，即 $T=24$ 小时 $=8.64\times10^4$ 秒；

由(3)式有 $d\theta=(gM/a^3)^{1/2}dt$ (4)

对(4)式两边同时积分，$\int_0^{2\pi}d\theta=\int_0^T(gM/a^3)^{1/2}dt$，

得
$$2\pi=\left(\frac{gM}{a^3}\right)^{1/2}T$$

$$\therefore \quad T=\frac{2\pi a^{3/2}}{(gM)^{1/2}}$$

$$\therefore \quad a=\{8.64\times10^4\times(gM)^{1/2}/2\pi\}^{2/3}$$

取 $g=6.67\times10^{-11}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$，

$$M \doteq 5.976 \times 10^{24}\,\text{kg}$$

$\therefore \quad a = 4.22 \times 10^4\,\text{km}$

设 h 是静止卫星的高度，R 是地球的半径，那么 $h + R = a = 4.22 \times 10^4\,\text{km}$，因此 $R = 0.64 \times 10^4\,\text{km}$，所以 $h = 3.58 \times 10^4\,\text{km}$.

卫星的速度矢量为 $\dot{r} = a\dot{\theta}e_\theta$，卫星的运动速率为 $V = a\dot{\theta} = a\left(\frac{gM}{a^3}\right)^{1/2} = \left(\frac{gM}{a}\right)^{1/2}$

所以 $V \doteq 3.07\text{km/s}$.

为了求卫星的个数，我们要求 α 的大小，如图 132－2 所示.

$$\because \quad \cos\alpha = \frac{R}{h+R} = \frac{0.64}{4.22}, \quad \therefore \quad \alpha \doteq 81^\circ$$

所以一颗卫星在赤道上所覆盖的角度大约为 162°. 因此至少要三颗卫星才能使赤道上的所有点可与一颗通信卫星保持联系.

参考文献： [48].

133、反刍动物的食物通道

鹿、羊、山羊、牛等都是反刍型的动物. 它们具有复杂的胃，刚吃进去的食物未经嚼碎就进入到一个贮藏室，这个贮藏室就是反刍动物的第一胃室也叫做瘤胃. 然后，当食物被嚼碎后就由重瓣胃进入皱胃，在这里它被进一步加工，并缓慢地进入肠内. 为了得到食物通过消化道这一过程的数学描述，Blaxter、Graham 和 Wainman 在 1956 年提出以下的模型.

解： 设 $r(t)$ 表示 t 时刻瘤胃中食物的数量，在 $t=0$ 时，它为已知量 r_0；$u(t)$ 表示 t 时刻皱胃中食物的数量，在 $t=0$ 时，$u=0$. $r(t)$ 减少的速率与 r 成比例. 假定 du/dt 由以下两项组成：一个是增加的比率等于 r 减少的比率，再有就是它减少的比率与 u 成比例. 这样，我们就得到下面的线性微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-k_1 r \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=k_1 r-k_2 u \tag{2}$$

这里 $k_1>0,k_2>0$ 为常数,它们叫做消化率,假定 $k_1\neq k_2$.

设 $v(t)$表示 t 时刻已进入十二指肠的食物的总量;设 $w(t)$表示大便的量.因为十二指肠可以得到来自皱胃的同样多的量,所以得下面的微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=k_2 u \tag{3}$$

最后还假定从动物体内排出的大便具有不变的时间延迟 τ,而且忽略进入血管中的损耗,我们得出在 $t-\tau$ 时,$w(t)=v$,这就是,对于 $t>\tau$,$w(t)=v(t-\tau)$. (4)

整个消化过程可以用下面的图式说明:



由(1)式及初始条件 $r(0)=r_0$,得:$r=r_0\mathrm{e}^{-k_1 t}$ (5)

代入(2)式,得:$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+k_2 u=k_1 r_0 \mathrm{e}^{-k_1 t}$

又 $t=0$ 时,$u=0$,则此一阶线性微分方程的解为:

$$u=\frac{r_0 k_1}{k_2-k_1}(\mathrm{e}^{-k_1 t}-\mathrm{e}^{-k_2 t}) \tag{6}$$

由(3)、(6)两式,$v=k_2\int_0^t u(t)\mathrm{d}t$

$$=r_0-\frac{r_0}{k_2-k_1}(k_2\mathrm{e}^{-k_1 t}-k_1\mathrm{e}^{-k_2 t}) \tag{7}$$

最后,将$(t-\tau)$代入(7)式 t 中就可以得到 $w(t)$.

图 135 给出了 $r(t)$、$u(t)$、$w(t)$各函数的图象.

参考文献: [41],p.293~295.

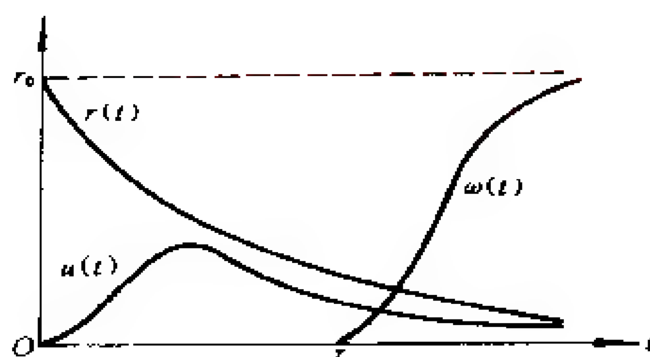


图 133　反刍动物的食物消化过程

134、恒速静脉滴注的一室模型

恒速静脉滴注的给药方法有若干优点.首先,在病情危急时,抗生素和药物可方便地和静脉输液、电解质或营养液一起输注给药.第二,输注速度容易调节,可以满足不同患者的需要.第三,恒定的输注可避免血药浓度的峰(最大值)谷(最小值)波动.这点对于治疗指数狭窄的药物尤为重要.下面我们来研究恒速静脉滴注的一室模型.

解:　恒速静滴的一室模型如图 134-1 所示.

假定药物以恒定的速率 k_0 进行静脉滴注,按一级速率过程(速率常数为 k)消除,在时间 t,体内的药量为 D,则有如下数学模型:

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=k_0-kD$$

在初始条件 $t=0,D=0$ 之下,不难求得其解为:

$$D=\frac{k_0}{k}(1-\mathrm{e}^{-kt})$$

∵　$D=VC$,V 为表观分布容积,C 为时间 t 的血药浓度,

∴ $$C=\frac{D}{V}=\frac{k_0}{Vk}(1-\mathrm{e}^{-kt}) \qquad (1)$$

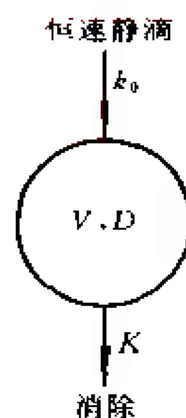


图 134 · 1　恒速静滴的一室模型

由(1)式知，血药浓度在静滴开始后随时间上升，并趋于一个稳定的水平 C_{ss}：

$$C_{ss}=\lim_{t\to\infty}\frac{k_0}{Vk}(1-\mathrm{e}^{-kt})=\frac{k_0}{Vk} \qquad (2)$$

这个稳态血药水平，称为坪水平或坪浓度. 显然，坪水平与 k_0 成正比，即静滴速率越大，所达到的坪水平就越高.

将(1)式除以(2)式，我们得到在时间 t 血药浓度达到坪水平的分数 f：

$$f=\frac{C}{C_{ss}}=1-\mathrm{e}^{-kt}=1-\mathrm{e}^{-\frac{0.693t}{t_{1/2}}} \qquad (3)$$

由此可见，达到稳态的速率与滴注速率 k_0 无关. 例如，当滴注持续时间等于半衰期 $t_{1/2}$ 的 5 倍时，由(3)式算得 $f=0.969$，即这时血药浓度将达到坪水平的 97%，当持续滴注 7 倍于半衰期长的时间，血药浓度约为坪水平的 99.2%.

当实际上可认为已达到坪水平后，如停止滴注，则以后血药浓度(特记为 C')的变化率可表为：$\frac{\mathrm{d}C'}{\mathrm{d}t'}=-kC'$，这里 t' 代表滴注停止后经历的时间. 在初始条件 $t'=0$，$C'=k_0/Vk$ 之下，容易解得：

$$C'=\frac{k_0}{Vk}\mathrm{e}^{-kt'}$$

如果尚未达到坪水平就停止滴注，设当时 $t=T$，则由(1)式，当时血药浓度为：

$$C=\frac{k_0}{Vk}(1-\mathrm{e}^{-kT})$$

而一俟滴注停止，血药浓度便按一级速率过程下降，故有：

$$C'=\frac{k_0(1-\mathrm{e}^{-kT})}{Vk}\mathrm{e}^{-kt'}$$

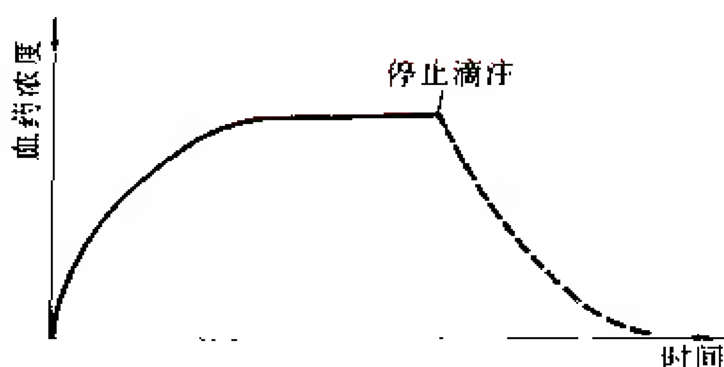


图 134-2　停止静脉滴注前后的血药浓度曲线

参考文献： [39],p.110～113.

135、主动脉压

主动脉是一个大的血管.当动脉血离开心脏后首先经过主动脉.在心跳周期的收缩期，在压力的作用下，血从心脏被泵出进入主动脉的一端.此时，主动脉壁扩张，大约容纳左心室射出血液的2/3，其余1/3流至外周.在舒张期，没有血液流进主动脉，此时主动脉壁发生弹性回缩，从而把血液挤出主动脉并使其进入体循环系统.

图135-1给出了心脏、主动脉及循环系统示意图.设 V 表示 t 时刻主动脉的体积，P 表示 t 时刻主动脉内的血压，假定 $V=V_0+kP$，其中 V_0 和 k 是常数.

体积的变化率 dV/dt 等于心脏泵进主动脉的血的比率减去流出主动脉进入循环系统的血的比率.由流体力学知识，流出动脉进入循环系统的血的比率正比于推动血的压力.因此有：

$$\frac{dV}{dt}=F(t)-CP$$

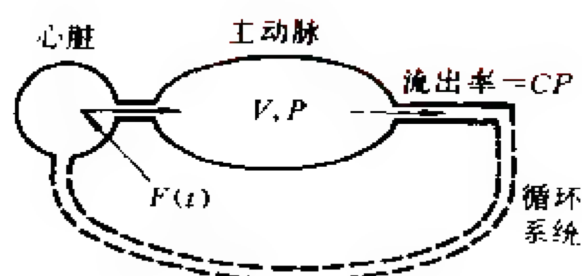


图 135－1　心脏、主动脉及循环系统示意图

其中 C 是常数，$F(t)$是心脏泵进主动脉的血的比率.

假设 $F(t)$是已知的 t 的函数，且有图 135－2 所示的形式．在舒张期 $F(t)=0$，在收缩期 $F(t)=A\sin\omega t$，其中 $0<t<\pi/\omega$.

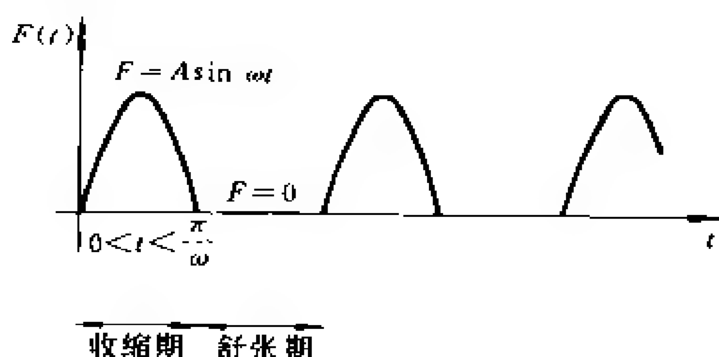


图 135－2　$F(t)$的图形

由 $V=V_0+kP$，得$\dfrac{dV}{dt}=k\dfrac{dP}{dt}$，所以我们得到下面的微分方程：

$$k\frac{dP}{dt}+CP=F(t)=\begin{cases}0, & \text{在舒张期;}\\ A\sin\omega t, & \text{在收缩期 } 0<t<\pi/\omega\end{cases}$$

求解此微分方程，得：

在收缩期 $0<t<\pi/\omega$

$$P=P_0e^{-Ct/k}+A(C^2+\omega^2k^2)^{-1}[\omega ke^{-Ct/k}+C\sin\omega t-\omega k\cos\omega t]$$

其中 P_0 是 $t=0$ 时(即收缩期开始时)的主动脉压.

在舒张期 $$P=P_1e^{-Ct/k}$$

其中 P_1 是收缩期末时的主动脉压.

参考文献： [49],p.514~515.

136、他是嫌疑犯吗

受害者的尸体于晚上7:30被发现.法医于晚上8:20赶到凶案现场,测得尸体温度为32.6℃;一小时后,当尸体即将被抬走时,测得尸体温度为31.4℃,室温在几小时内始终保持在21.1℃.此案最大的嫌疑犯是张某,但张某声称自己是无罪的,并有证人说:"下午张某一直在办公室上班,5:00时打了一个电话,打完电话后就离开了办公室."从张某的办公室到受害者家(凶案现场)步行需5分钟,现在的问题是:张某不在凶案现场的证言能否使他被排除在嫌疑犯之外?

解： 设 $T(t)$ 表示 t 时刻尸体的温度,并记晚8:20为 $t=0$,则 $T(0)=32.6℃$,$T(1)=31.4℃$

假设受害者死亡时体温是正常的,即 $T=37℃$ 要确定受害者死亡的时间,也就是求 $T(t)=37℃$ 的时刻 T_d.如果此时张某在办公室,则他可被排除在嫌疑犯之外,否则张某不能被排除在嫌疑犯之外.

人体体温受大脑神经中枢调节.人死后体温调节功能消失,尸体的温度受外界环境温度的影响.假设尸体温度的变化率服从牛顿冷却定律,即尸体温度的变化率正比于尸体温度与室温的差,即 $\frac{dT}{dt}=-k(T-21.1)$.k 是常数.微分方程的通解为:

$$T(t)=21.1+ae^{-kt}$$

$$\because \quad T(0)=21.1+ae^{-k\times 0}=32.6 \qquad \therefore \quad a=11.5$$

又∵ $T(1)=21.1+11.5e^{k\times 1}=31.4$　　∴$e^k=115/103$

∴　$k=\ln 115-\ln 103 \doteq 0.110$

∴　$T(t)=21.1+11.5e^{-0.110\times t}$

当 $T=37$℃时，有 $21.1+11.5e^{-0.110\times t}=37$

∴　$t\approx -2.95$ 小时 ≈ -2 小时 57 分

∴　$T_d=8$ 小时 20 分 -2 小时 57 分 $=5$ 小时 23 分

即死亡时间大约在下午 5:23，因此张某不能被排除在嫌疑犯之外.

思考题： 张某的律师发现受害者在死亡的当天下午去医院看过病. 病历记录：发烧 38.3℃. 假设受害者死时的体温为 38.3℃，试问张某能被排除在嫌疑犯之外吗？注：死者体内没有发现服用过阿斯匹林或类似药物的迹象.（答案：死亡时间大约在 4:40，此时张某正在办公室上班，因此可被排除在嫌疑犯之外.）

参考文献： [45]，p.415～416.

137、游船上的传染病人数

一只游船上有 800 人，一名游客患了某种传染病，12 小时后有 3 人发病. 由于这种传染病没有早期症状，故感染者不能被及时隔离. 直升机将在 60 至 72 小时间将疫苗运到，试估算疫苗运到时患此传染病的人数.

解： 设 $y(t)$表示发现首例病人后 t 小时时刻的感染人数，则 $800-y(t)$表示此时刻未受感染的人数. 由题意知：$y(0)=1$，$y(12)=3$.

当感染人数 $y(t)$很小时，传染病的传播速度较慢，因为只有很少的游客能接触到感染者；当感染人数 $y(t)$很大时，未受感染的人数 $800-y(t)$很小，即只有很少的游客能被传染，所以此时传染病的传播速度也很慢. 排除上述两种极端的情况，当有很多的感

染者及很多的未感染者时，传染病的传播速度很快.因此传染病的发病率，一方面受感染人数的影响，另一方面也受未感染人数的制约.

根据上面的分析，可建立如下的微分方程：

$\frac{dy}{dt}=ky(800-y)$，k 是比例常数.通解为：$y(t)=\frac{800}{1+Ce^{-800kt}}$

$\because \quad y(0)=1 \quad \therefore \quad 1=\frac{800}{1+C} \quad \therefore \quad C=799$

又 $y(12)=3 \quad \therefore \quad 3=\frac{800}{1+799e^{-800\times k\times 12}}$

$$\therefore \quad e^{-12\times 800k}=\frac{\frac{800}{3}-1}{799}=\frac{797}{799\times 3}$$

$$\therefore \quad 800k=-\frac{1}{12}\ln\frac{797}{799\times 3}\approx 0.09176$$

$$\therefore \quad y(t)=\frac{800}{1+799e^{-0.09176t}}$$

下面计算 $t=60$、72 小时时感染者的人数：

$$y(60)=\frac{800}{1+799e^{-0.09176\times 60}}\approx 188$$

$$y(72)=\frac{800}{1+799e^{-0.09176\times 72}}\approx 385$$

从上面的数字可以看出，在 72 小时疫苗被运到时感染者的人数将是在 60 小时时感染者人数的近 2 倍.可见在传染病流行时及时采取措施是至关重要的.

参考文献： [45],p.442～443.

138、肿瘤生长的数学模型

研究肿瘤细胞增殖动力学，可为肿瘤的治疗提供一定的理论

依据.这对临床合理安排各种治疗措施,拟订最佳的治疗方案,以便更有效地杀灭癌细胞和减少机体正常细胞的损伤均有重要意义.近二十年来,人们对肿瘤生长的规律性的认识有了长足的进步,描述肿瘤生长过程的数学模型也取得了一定的进展.

迄今比较普遍的看法是:在肿瘤生长的早期阶段,大多数都表现出指数生长的特征,但以后的生长速率往往减小.就是说,如果在半对数纸上,将肿瘤的大小对时间作图,那么在整个生长期内,绝大多数肿瘤的生长曲线不是直线.一些报告认为,肿瘤生长速率连续减慢的特点,可用立方根函数来表达,因为有些肿瘤其大小(直径、体积或细胞数)的立方根对时间作图,呈一直线.Mendelsohn ML 等认为,不同类型的肿瘤在不同的环境下,其生长方式可能不同,比如:有的表现为指数函数,有的表现为立方根函数,有的甚至是线性函数.Mendelsohn 提出如下数学模型:

$$\frac{dV}{dt}=kV^b \tag{1}$$

其中 V 为肿瘤体积,k 为生长速率常数,b 为形状参数,它决定生长的方式.

$$\int\frac{dV}{V^b}=\int k\,dt \qquad \therefore \quad \frac{V^{1-b}}{1-b}=kt+C$$

其中 C 为积分常数,由初始条件决定.

当 $b\neq 1$ 时,$V^{1-b}=(1-b)(kt+C)$

当 $b=2/3$ 时,$V^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}(kt+C)$,这就是一种立方根函数.

当 $b=1$ 时,方程(1)变为 $\frac{dV}{dt}=kV$,$V=Ce^{kt}$,$t=0$ 时

$$V=V_0, \quad \therefore \quad C=V_0, \quad \therefore \quad V=V_0e^{kt} \tag{2}$$

这表明肿瘤的生长可用指数函数描述.

通常把肿瘤体积增加一倍所需的时间称为肿瘤的倍增时间,记为 t_d.对于指数生长,容易由(2)式推得 $t_d=\frac{\ln 2}{k}\approx\frac{0.693}{k}$,即倍

增时间与生长速率常数成反比.

把指数函数(2)换成以2为底,则得 $V=V_0 2^{t/t_d}$,如按肿瘤直径 D 计算,$V=\pi D^3/6$,便得 $D=D_0 2^{t/3t_d}$,临床上常用该式推算肿瘤的大小.

考虑到肿瘤的生长常有逐渐减慢的趋势,因而除早期阶段外,一般不宜用倍增时间固定不变的指数函数来描述,于是,如下数学模型就显示出它的优越性:

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt}=kV \\ \dfrac{dk}{dt}=-\alpha k \end{cases} \tag{3}$$

式中 V 表示在时间 t 时肿瘤的大小,k 和 α 都是取正值的比例系数.

第一个方程的含义是:V 随 t 增大的速率与当时的 V 值成正比(比例系数为 k);第二个方程的含义是:反映肿瘤增长速率的比例系数 k 不是常数,其本身随时间 t 减小,减小速率又与当时的 k 值成正比(比例系数为 α).

由微分方程组(3)的第二个方程得 $k=Ae^{-\alpha t}$式中A 代表$t=0$时的 k 值.代入(3)式的第一个方程,有$\dfrac{dV}{dt}=Ae^{-\alpha t}V$,即$\dfrac{dV}{V}=Ae^{-\alpha t}dt$,积分之,可得:

$$V=V_0 e^{\frac{A}{\alpha}\cdot(1-e^{-\alpha t})} \tag{4}$$

式中 V_0 为 $t=0$ 时的 V 值,这个函数称为 Gompertz 函数.

Gompertz 函数有下列几个特点:

(1) 当 αt 足够小时,$e^{-\alpha t}\approx 1-\alpha t$,(4)式就可简化为:$V=V_0 e^{At}$.

由此可得到两点推论:当 α 为不等于0的有限值时,且 t 足够小,肿瘤呈指数生长,生长速率常数为 A;当 $\alpha=0$ 时,在整个生长期间,肿瘤表现为指数生长,这由(3)式更易看出.

(2) 当 t 充分大时，$e^{-\alpha t}\approx 0$，由(4)式得 V 的最大渐近值 V_{max}：$V_{max}=V_0 e^{\frac{A}{\alpha}}$，这可看作是肿瘤生长的理论上限值.

(3) 不难推得倍增时间 t_d 如下：$t_d=\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{A}{A-\alpha e^{\alpha t}\ln 2}\right)$ 表明倍增时间不是常数，而是随时间 t 改变，并且随着 t 增大，t_d 也增大，即倍增时间延长.

(4)求二阶导数 $\frac{d^2V}{dt^2}$，并令之等于 0，可得 Gompertz 曲线的拐点 $\left(\frac{1}{\alpha}\ln\frac{A}{\alpha},V_0 e^{(\frac{A}{\alpha}-1)}\right)$，即在 $t=\frac{1}{\alpha}\ln\frac{A}{\alpha}$ 处，曲线由凹转为凸，亦即肿瘤的生长速率由递增转为递减.

参考文献： [39]，p. 236～242.

139、被食者—食者系统的 Volterra 模型

下面我们来讨论一个包含两个群体的系统，其中一个群体紧密地依赖于另一个群体. 例如，寄生虫与其宿主、害虫与其天敌、肿瘤细胞与正常细胞等，我们笼统地称之为被食者与食者.

设 $x(t)$、$y(t)$ 分别表示 t 时刻被食者和食者的数量. 如果各自单独生活，被食者的增长速率正比于当时的数量，即

$$\frac{dx}{dt}=\lambda x \tag{1}$$

而食者由于没有被食对象，其数量减少的速率正比于当时的数量，即

$$\frac{dy}{dt}=-\mu y \tag{2}$$

现在两者生活在一起，被食者有一部分遭食者消灭，于是(1)式中的 λ 将减少，减少的量正比于食者的数量，所以(1)式应改为

$$\frac{dx}{dt}=(\lambda-\alpha y)x \tag{3}$$

类似地,食者有了被食对象,(2)式中的 μ 也减少,减少的量也正比于被食者的数量,所以(2)式应改为

$$\frac{dy}{dt}=-(\mu-\beta x)y \tag{4}$$

由(3)、(4)式得方程组:$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=(\lambda-\alpha y)x\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-(\mu-\beta x)y\end{cases}$

称之为 Volterra - Lotka 方程,其中 α、β、λ、μ 均为正数. 初始条件为: $\begin{cases}x(0)=x_0\\ y(0)=y_0\end{cases}$

这是非线性方程组,不易直接求解.我们不去直接解这个方程组,而是将它们相除,得微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\beta x-\mu)y}{(\lambda-\alpha y)x}$$

分离变量积分后得通解

$$-\alpha y-\beta x+\lambda\ln y+\mu\ln x=\ln C$$

同时取两端的指数,得

$$\frac{y^{\lambda}}{e^{\alpha y}}\cdot\frac{x^{\mu}}{e^{\beta x}}=C$$

以初始条件代入,不难确定 C 的数值,从而得到一个特解,它是 $x-y$ 平面上的一条闭曲线.只要初始值 x_0 和 y_0 不为零,这条闭曲线就永远不通过零点.当被食者较多时,食者增多,因而被食者必定减少,被食者减少使食者也随之减少,从而被食者又会增多.如此,两者的数量起伏,周而复始,维持着生态平衡.

把酵母细胞和一种原生动物一起放到培养基中,构成一个被食者—食者系统,酵母作为这种原生动物的食物,相当于被食者.图 139 是关于这两个群体密度的观察曲线,虽然并不是正弦曲线,

但波动的周期接近常数,而且可以看出,食者数量的最大值总落后于被食者数量的最大值约四分之一周期.上述数学模型不仅适用于单细胞间的生存竞争,而且也适用于其它群体间的生存竞争.

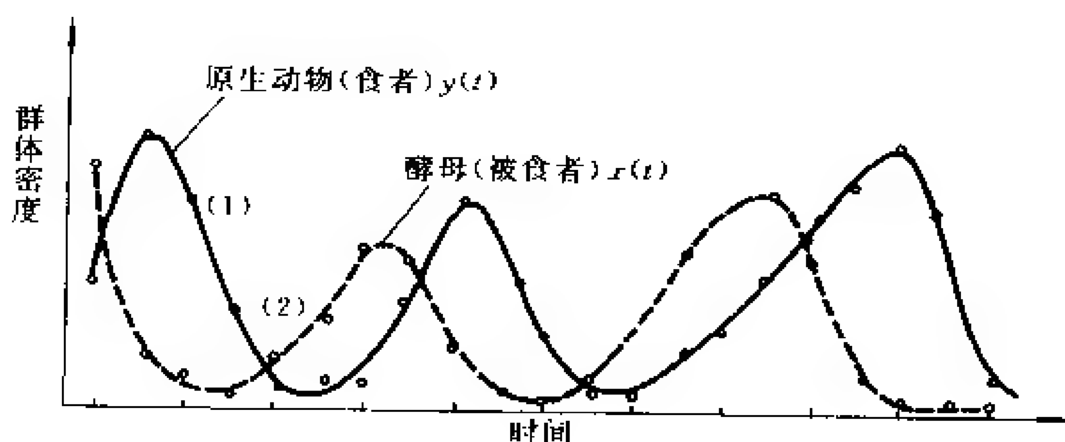


图 139 一种原生动物(食者)的群体密度和酵母(被食者)的群体密度随时间变化过程

现在我们考虑一个有趣的问题,假定被食者和食者由于别的因素(如过份的狩猎或山火),同时按比例消亡.一旦这种因素的作用停止,谁恢复得较快?是食者还是被食者?我们用方程(3)和(4)来回答这个问题.当 $x(t)$、$y(t)$都减小时,乘积项 xy 也减小.例如,x 和 y 都减半,λx 和 μy 都减半,αxy 和 βxy 却减为 1/4.乘积项对食者来说是生长项,而对被食者来说是消亡项,xy 的减小使食者受到较大的损失.所以,这场悲剧过后,被食者恢复较快.这项奇妙的推断来自 Volterra 方程,故称为 Volterra 原理.

这个原理在杀虫剂施用方面得到广证实.例如,吹棉蚧这种昆虫于 1968 年偶然从澳洲传入美国后严重地威胁着美国的柑桔业,为此,人们又引入了它的天敌澳洲瓢虫.这种甲虫使吹棉蚧的数量得到控制.后来,园艺家们使用 DDT,以期进一步减少吹棉蚧.然而,由于 DDT 同时杀死吹棉蚧及其天敌,后来人们发现吹棉蚧的数目反而增多了.

上述原理在临床医学中也是有意义的.某些具有较高毒性的

药物既能抑制癌细胞的生长，同时也能抑制正常细胞的生长，而癌细胞与正常细胞构成了被食者—食者系统，在较高毒性的药物作用下，作为食者的正常细胞将遭到更大的损失，一旦停止用药，作为被食者的癌细胞可能变本加厉地增长起来．这便是癌症化学治疗中的一个严重问题．

参考文献： [36]，p.262～264．

140、布朗运动

若将某种物质注入一充满溶液的管子中．悬浮在液体中的该物质的分孑随机游动并遍及该溶液，这种现象被称作布朗运动．假设液体本身是不动的，那么布朗运动所引起的随机迁移过程就称作扩散．这一过程有下面的数学描述．

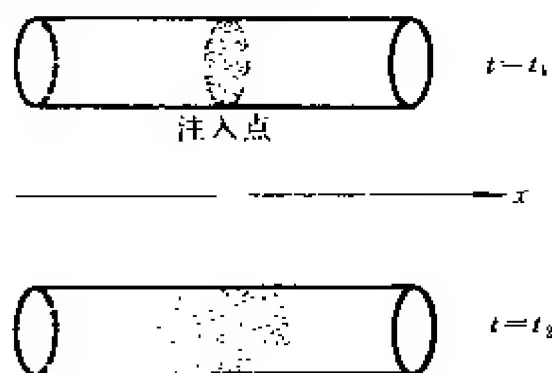


图 140－1 微粒在 t_1、t_2 时刻的分布，$0<t_1<t_2$

让 x 轴平行于管子的轴，如图 140－1 所示．为了简单起见，假设分子浓度 c 仅在 x 方向上变化，且浓度也依赖于时间 t，因此浓度是 x 和 t 的二元函数．在一定的情形下，浓度 c 由下式给出：

$$c = t^{1/2} e^{-x^2/kt}$$

其中 k 是正常数，c 的图象如图 140－2 所示.

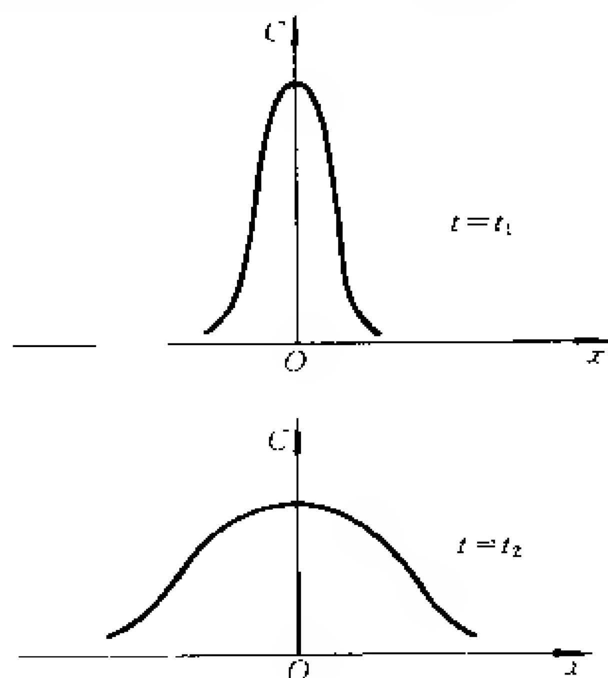


图 140－2　$c(x,t)=t^{-1/2}e^{-x^2/kt}$ 在 t_1、t_2 时刻的曲线，$0<t_1<t_2$，每一个图形都是一个钟形线(正态分布曲线)

我们要证明 c 对 t、x 的偏导数满足下列一维扩散方程：$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{k}{4}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$

证：　$c=t^{-1/2}e^{-x^2/kt}$

$$\frac{\partial c}{\partial t}=-\frac{1}{2}t^{-3/2}e^{-x^2/kt}+t^{-1/2}e^{-x^2/kt}\left(\frac{x^2}{kt}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}t^{-3/2}+\frac{x^2}{k}t^{-5/2}\right)e^{-x^2/kt}$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}=t^{-1/2}e^{-x^2/kt}\left(-\frac{2x}{kt}\right)=-\frac{2}{k}t^{-3/2}xe^{-x^2/kt}$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}=-\frac{2}{k}t^{-3/2}e^{-x^2/kt}-\frac{2}{k}t^{-3/2}xe^{-x^2/kt}\left(-\frac{2x}{kt}\right)$$

$$= \left(-\frac{2}{k}t^{-3/2} + \frac{4x^2}{k^2}t^{-5/2}\right)e^{-x^2/kt}$$

$$= \frac{4}{k}\left(-\frac{1}{2}t^{-3/2} + \frac{x^2}{k}t^{-5/2}\right)e^{-x^2/kt} = \frac{4}{k}\frac{\partial c}{\partial t}$$

所以函数 $c = t^{-1/2}e^{-x^2/kt}$ 满足一维扩散方程.

扩散方程也可由物理原理和实验导出,它决定了注入物质在管子的 x 处、在 t 时刻的浓度. 任何表示为 x 和 t 的浓度函数 $c(x,t)$ 都满足扩散方程,而我们只考虑了许多函数中的一个.

有趣的是,扩散方程可被用于生态领域中研究新环境下种群的迁移. 这时,可把种群的迁移看作分子的随机游动. 流行期传染病的传播也遵从同样的模式.

参考文献: [46],p.729~733.

141、静脉输液问题

静脉输入葡萄糖是一种重要的医疗技术,为了研究这一过程,设 $G(t)$ 为 t 时刻血液中的葡萄糖含量,且设葡萄糖以每分钟 k 克的固定速率输入到血液中. 与此同时,血液中的葡萄糖还会转化为其他物质或转移到其他地方,其速率与血液中的葡萄糖含量成正比. 试列出描述这一情况的微分方程,并解之.

解: 因为血液中葡萄糖含量的变化率 $\frac{dG}{dt}$ 等于增加速率与减少速率之差,而增加速率为常数 k,减少速率(即转化为其他物质或转移到其他地方的速率)为 αG,其中 α 为比例常数. 所以

$$\frac{dG}{dt} = k - \alpha G \quad 或 \quad \frac{dG}{dt} + \alpha G = k$$

这是一个一阶常系数非齐次线性方程,利用通解公式得

$$G(t) = e^{-\int \alpha dt}\left[\int k e^{\int \alpha dt} dt + C\right]$$

$$= e^{-\alpha t}\left[\frac{k}{\alpha}e^{\alpha t} + C\right]$$

$$= \frac{k}{\alpha} + Ce^{-\alpha t}$$

但 $G(0)$表示最初血液中葡萄糖的含量，所以，

$$G(0) = \frac{k}{\alpha} + C, \text{即 } C = G(0) - \frac{k}{\alpha}$$

这样便得到

$$G(t) = \frac{k}{\alpha} + \left(G(0) - \frac{k}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}$$

此式即为 t 时刻血液中的葡萄糖含量.

参考文献： [1]，下册，p.449.

142、逻辑斯蒂(Logistic)方程

在一个动物群体中，个体的生长率是平均出生率与平均死亡率之差.设某群体的平均出生率为正的常数 β，由于拥挤以及对食物的竞争加剧等原因，个体的平均死亡率与群体的大小成正比，其比例常数为 $\delta(>0)$.若以 $P(t)$记 t 时刻的群体总量，则$\frac{dP}{dt}$就是该群体的生长率.每个个体的生长率为$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$.设 $P(0)=P_0$，试写出描述群体总量 $P(t)$的微分方程，并解之.

解： 由题中所给条件，个体的平均死亡率为 δP，从而个体的生长率为 $\beta - \delta P$，则

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \beta - \delta P$$

即

$$\frac{dP}{dt} = P(\beta - \delta P)$$

此微分方程称为逻辑斯蒂方程，它与条件 $P(0)=P_0$ 合在一起，就

构成了一个初值问题，这个初值问题的解描述了一个群体的生长规律．下面解这个方程．由逻辑斯蒂方程得

$$\frac{\mathrm{d}P}{P(\beta-\delta P)}=\mathrm{d}t$$

所以

$$\int\frac{\mathrm{d}P}{P(\beta-\delta P)}=\int\mathrm{d}t=t+C$$

现用部分分式来求左边的积分．因为

$$\frac{1}{P(\beta-\delta P)}=\frac{1}{\beta P}+\frac{\delta}{\beta(\beta-\delta P)}$$

所以

$$\int\frac{\mathrm{d}P}{P(\beta-\delta P)}=\int\frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{d}P}{P}+\frac{\delta}{\beta}\int\frac{\mathrm{d}P}{\beta-\delta P}$$

$$=\frac{1}{\beta}\ln P-\frac{1}{\beta}\ln(\beta-\delta P)=t+C$$

即

$$\ln\left(\frac{P}{\beta-\delta P}\right)^{\frac{1}{\beta}}=t+C$$

$$\left(\frac{P}{\beta-\delta P}\right)^{\frac{1}{\beta}}=\mathrm{e}^{C}\mathrm{e}^{t}=C_1\mathrm{e}^{t}$$

所以

$$\frac{P}{\beta-\delta P}=C_2\mathrm{e}^{\beta t}\qquad（其中 C_2=C_1^{\beta}）$$

由初始条件 $P(0)=P_0$ 易得 $C_2=\dfrac{P_0}{\beta-\delta P_0}$

将 C_2 代入，整理便得

$$P(t)=\frac{\beta}{\delta+[(\beta/P_0)-\delta]\mathrm{e}^{-\beta t}}$$

思考题： $(a)\ \delta=0.001,\beta=0.4,P(0)=300$，求 $P(10)$．

$(b)\ \delta=0.001,\beta=0.4,P(0)=500$，求 $P(10)$．

（答案：398，402）．

参考文献： [1],下册,p.441～442.

143、他的胰脏正常吗

有一种医疗手段,是把示踪染色注射到胰脏里去以检查其功能.正常胰脏每分钟吸收掉染色的40%,现内科医生给某人注射了0.3克染色,30分钟后还剩下0.1克,试问此人的胰脏是否正常?

解： 假设此人胰脏是正常的.

用$P(t)$表示注射染色后t分钟时此人胰脏中的染色量.由于正常心脏每分钟吸收掉染色的40%,即染色的衰减率为$40\%=0.4$,从而得到

$$\frac{\mathrm{d}P/\mathrm{d}t}{P}=-0.4 \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=-0.4P$$

这个方程解的形式为

$P(t)=Ce^{-0.4t}$,其中t的单位是分钟.

由$P(0)=0.3$克,$Ce^{-0.4\times 0}=C=0.3$.

故
$$P(t)=0.3e^{-0.4t}$$

30分钟后剩下的染色应为$P(30)=0.3e^{-0.4\times 30}\approx 0$.这与实际上30分钟后还剩下0.1克染色矛盾,故此人胰脏不正常.

参考文献： [1],上册,p.325.

144、油井收入为多少

一个月产300桶原油的油井,在3年后将要枯竭.预计从现在开始t个月后,原油价格将是每桶

$$P(t)=18+0.3\sqrt{t}\ (美元)$$

如果假定油一生产出就被售出,则问:从这口井可得到多少美元的收入?

解： 令 $R(t)$表示从现在开始 t 个月收入，则每个月的收入为$\frac{dR}{dt}(t)$，由于每月收入等于每桶油的价格与每月卖出油的桶数之积，而这里，每桶油的价格为 $P(t)=18+0.3\sqrt{t}$；每月卖出的桶数为 300，因此

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt}(t)&=300\times(18+0.3\sqrt{t})\\&=5\,400+90\sqrt{t}\end{aligned}$$

解上述可分离变量方程，有

$$dR=(5\,400+90\sqrt{t})dt$$

两边同时积分，得

$$\begin{aligned}R(t)&=\int(5\,400+90\sqrt{t})dt\\&=5\,400+60t^{3/2}+C\end{aligned}$$

而 $R(0)=0$，于是有 $C=0$，且

$$R(t)=5\,400+60t^{3/2}$$

由于这口井将在 36 个月后干枯，于是将来的总收入是

$$\begin{aligned}R(36)&=5\,400\times36+60\times36^{3/2}\\&=207\,360\ (\text{美元})\end{aligned}$$

参考文献： [51]，p.232.

145、湖泊体积及平均水深的估算

椭球正弦曲面(elliptic sinosoids)是许多湖泊的湖床形状的很好的近似．假定湖面的边界为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$．若湖的最大水深为 h_m，则椭球正弦曲面由

$$f(x,y)=-h_m\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right)，其中\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant1 给出．$$

现要求湖水的总体积 V 及平均水深 h_{aV}.

解: 若 $R=\left\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$ 是湖面的椭圆区域,则湖水的总体积为

$$V=\iint_R |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=h_m\iint_R \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

被积函数的形状启示我们用变换

$$\begin{cases}x=ar\cos\theta,\\ y=br\sin\theta,\end{cases}\qquad 0\leqslant r<1,0\leqslant\theta<2\pi$$

于是由二重积分的变量替换公式得

$$\begin{aligned}V&=abh_m\int_0^{2\pi}\int_0^1\cos\left(\frac{\pi}{2}r\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=2\pi abh_m\int_0^1 r\mathrm{d}\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}r\right)\right)\\&=2\pi abh_m\left[r\cdot\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi r}{2}\Big|_0^1-\frac{2}{\pi}\int_0^1\sin\frac{\pi r}{2}\mathrm{d}r\right]\\&=2\pi abh_m\left(\frac{2}{\pi}-\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\right)\\&=4abh_m\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\approx 1.435abh_m\end{aligned}$$

上述公式可通过测量 a,b,h_m 来估计湖水的体积(即水量).

容易证明椭圆 R 的面积为 πab,因而平均湖水深度为

$$h_{aV}=\frac{1}{\pi ab}\iint_R|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\approx\frac{1.435}{\pi}h_m$$

人们对全世界 107 个湖泊的研究得到 h_{aV}/h_m 的平均值为 0.467.

参考文献: [31],p.769~770.

146、如何控制体重

问题:《北京晚报》1990.10.9 第 6 版:“刘寿斌面向未来”一文

中说到,"由于赛前减体重过多,体力不济使他在他自己拿手的抓举比赛中两次失败……屈居第二."那末正确的减重应该怎样呢?

此外,许多饲养场也要在限定的时间内使牲畜增肥到一定重量出售,取得最大利润.他们应该怎么办?

解: 用热量平衡方程来解此问题:

设每天的饮食可产生热量 A,用于新陈代谢消耗热量 B,活动消耗热量 $C\times$体重,并且理想假定增重、减重的热量主要由脂肪提供,每公斤脂肪转化的热量为 D,记 $W(t)$为体重,于是有下述平衡方程.

$$[W(t+\Delta t)-W(t)]D=[(A-B)-CW(t)]\Delta t$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{W(t+\Delta t)-W(t)}{\Delta t}=\frac{A-B}{D}-\frac{C}{D}W(t).$$

得微分方程 $$\begin{cases}\dfrac{dW(t)}{dt}=a-bW(t)\\ W(0)=W_0\end{cases}$$

其中常数 $a=\dfrac{A-B}{D}$与食量、新陈代谢有关,$b=\dfrac{C}{D}$与活动量有关.W_0 为初始体重.解得

$$W(t)=\frac{a}{b}+\left(W_0-\frac{a}{b}\right)e^{-bt}$$

分析:1. 理论上增重,减肥都是可能的,因为当 $t\to\infty$时,$W(t)\to\frac{a}{b}$.调节 a 与 b 可得到你所愿望的那个值.近代科技发展,新陈代谢也是可调节的.但如何调节 a,b 要靠医生、营养师、生物学家等一齐来做.

2. 只吃维持生命所需的那部分新陈代谢的热量是不行的,$\because$ $A=B$ 使得$a=0$,$\lim\limits_{t\to\infty}W(t)=0$.要导致死亡.

3. 只吃不活动也不行,因为这时 $b=0$. $W(t)=W_0+at$ $\therefore$ $\lim\limits_{t\to\infty}W(t)=\infty$,说明要得肥胖症,很危险,也要导致死亡(当然体重不会无限变大).

4. 刘寿斌减重的数学问题是明确的:已知 W_0,要达到的值为 W_1,其期限为 t,求 a,b 的最佳组合,使 $W_1=\frac{a}{b}+\left(W_0-\frac{a}{b}\right)e^{-bt}$ 成立.但解决这个问题还要靠教练,医生与运动员.

参考文献: [29],p.9~11.

147、我国人口会不会下降

问题:1994 年 3 月 7 日《扬子晚报》登载"中国社会科学院最近预测,今年我国总人口将超过 12 亿……,据国家计划生育委员会估计,中国总人口峰值年是 2044 年,峰值人口达 15.6 亿或 15.7 亿.人口增长到'顶峰'后,就有可能走'下坡路',出现下降趋势."你能否从数学上给出论证.

解: Malthus 生物总数增长定律说:在孤立群体,生物总数 $N(t)$ 的变化率 $\frac{dN(t)}{dt}=rN(t)$(正比于 $N(t)$).在大多数简化的模型中假定 r 是常数.该数学模型为

$$\begin{cases}\frac{dN(t)}{dt}=rN(t)\\ N(t_0)=N_0\end{cases}$$

得出解 $N(t)=N_0e^{r(t-t_0)}$.因此,遵循 Malthus 总数增长定律的任何生物都是随时间按指数方式增长.当群体不大时,这个定律与实际情况吻合很好.但多种实验证明当群体很大时,它就不准确了.我们修改模型 $\frac{dN(t)}{dt}=rN(t)$ 中的 r 为 $r(t)=A-B(t-t_0)$,其中 A,B 为参数.这样得到新的数学模型:

$$\begin{cases}\frac{dN(t)}{dt}=[A-B(t-t_0)]N(t)\\ N(t_0)=N_0\end{cases}$$

下面根据 $t_0=1994$ 时 $N_0=12$ 亿及到 2044 年人口达高峰并开始下降来估算 A,B，并预测今后一些年的人口总量.

∵ 在 2044 年人口达最大值，∴ $\left.\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=2044}=0$，算出 $A-B\cdot 50=0, B=\frac{A}{50}$. 再解

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}=A\left(1-\frac{t-t_0}{50}\right)N(t)\\ N(t_0)=N_0\end{cases}$$

得解：

$$N(t)=Ce^{A\left(t-\frac{(t-t_0)^2}{100}\right)}$$，代入初始条件

$$N(t)=N_0e^{A(t-t_0)\left(1-\frac{t-t_0}{100}\right)}$$

以 $t_0=1994, N_0=12$ 亿，及 $t=2044$ 代入得

$$N(2044)=N_0e^{25A}$$

取 $A=0.01$，算得

$$N(2044)=15.41\text{ 亿}$$

取 $A=0.011$，得 $N(2044)=15.8$ 亿. 这个数值与计划生育委员会的预测基本一致.

由 $A=0.011, B=\frac{A}{50}$，预测 1995，2000，2054，2094 年的人口为

$$N(1995)\doteq 12.13\text{ 亿}$$
$$N(2000)\doteq 12.768\text{ 亿}$$
$$N(2054)\doteq 15.626\text{ 亿}$$
$$N(2094)\doteq 12\text{ 亿}$$

思考题： 如果令 $r(t)=A-B(t-t_0)^2$ 又会得到什么结论?

参考文献： [29]，p. 90～99.

148、2000 年世界人口知多少

据统计,六十年代世界人口增长情况如下表:

表 148　60 年代世界人口统计表(单位:百万)

年	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
人口	2972	3061	3151	3213	3234	3285	3356	3420	3483

试求出最佳拟合曲线,并预测公元 2000 年时的世界人口.

解: 所谓最佳拟合曲线,在本例中是指根据所给数据建立人口 N 与时间 t 之间函数关系的一个经验公式(即近似表达式)$N=f(t)$,使得 $N=f(t)$的曲线尽可能好地和这 9 组数据拟合,曲线 $N=f(t)$就叫最佳拟合曲线.

这里要弄清两个问题:1) 如何确定经验公式? 2) 什么叫"尽可能地好"?

关于经验公式的选取(对一般的函数 $f(x)$而言),通常的作法是,取一个简单的函数列$\{\phi_j(x)\}(j=0,1,2,\cdots,n)$,比如幂函数列$\{x^j\}(j=0,1,2,\cdots,n)$作为基本函数系,以 $\phi_j(j=0,1,2,\cdots,n)$的一个线性组合 $\sum_{j=0}^{n} a_j\phi_j(x)$作为 $f(x)$的近似表达式.如果根据学科的有关知识,所研究现象的规律已经知道,则取这个规律的表达式为 $f(x)$.所谓尽可能地好,是指未知参数 $a_j(j=0,1,2,\cdots,n)$的选取要使偏差的平方和

$$Q=\sum_{i=1}^{m}\left[y_i-\sum_{j=0}^{n} a_j\phi(x_i)\right]^2$$

为最小.这里$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,m)$为统计或观测数据.这种根据偏差平方和为最小的条件来选择参数 a_j 的方法叫做最小二乘法(注意,与例 56 中介绍的插值法不同,这里并没要求所求的曲线必须通过所有 m 个已知点).

现在转回主题.首先确定用什么函数形式对数据进行曲线拟合.从人口增长的统计资料和人口理论模型知道,当人口总数不是很大时,在不太长的时期内,人口增长接近于指数曲线.因此,可采用指数函数 $N=e^{a+bt}$ 对数据进行拟合.为便于计算,对该式两边取对数,得 $\ln N=a+bt$,令 $Z=\ln N$,得 $Z=a+bt$,令

$$Q=\sum_{i=1}^{9}(\hat{Z}_i-N_i)^2=\sum_{i=1}^{9}(a+bt_i-N_i)^2$$

其中 $\hat{Z}_i=a+bt_i$,$t_i(i=1,2,\cdots,9)$ 依次为 1960,1961,…,1968 年;N_i 为相应的人口数.于是,本问题的数学模型为

$$\min Q=\sum_{i=1}^{9}(a+bt_i-N_i)^2$$

利用二元函数极值的必要条件,得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial a}=2\displaystyle\sum_{i=1}^{9}(a+bt_i-N_i)=0\\[2ex]\dfrac{\partial Q}{\partial b}=2\displaystyle\sum_{i=1}^{9}(a+bt_i-N_i)t_i=0\end{cases}$$

解此方程组,得

$$\hat{b}=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{9}(t_iN_i-9\bar{t}\,\bar{N})}{\displaystyle\sum_{i=1}^{9}t_i^2-9(\bar{t})^2},\quad \hat{a}=\bar{N}-\hat{b}\bar{t}$$

这里

$$\bar{t}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}t_i,\quad \bar{N}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}N_i$$

将 t_i,N_i,$\bar{t}$ 及 $\bar{N}$ 代入,求得 $\hat{b}=0.01757$,$\hat{a}=-26.4258$.再将 $\hat{a}$、$\hat{b}$ 代入 $\ln N=a+bt$ 中,然后取反对数,得

$$N=e^{26.4258+0.01757t}$$

即为所求的人口问题拟合曲线.到公元 2000 年世界人口预测应为

$$N(2000)=60.8876(亿)$$

下面列出按此模型算出的 60 年代世界人口数及与 60 年代相

应人口统计数据的误差，从中可以看出，我们所建的指数增长模型与实际人口数据是吻合得很好的.

年	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
[人口]	3015	3069	3123	3178	3235	3292	3350	3410	3470
误差(%)	1.4	0.2	0.9	−1.1	0.03	0.2	0.2	·0.3	0.4

(这里[人口]表示按指数增长模型算出的人口数，单位为百万).

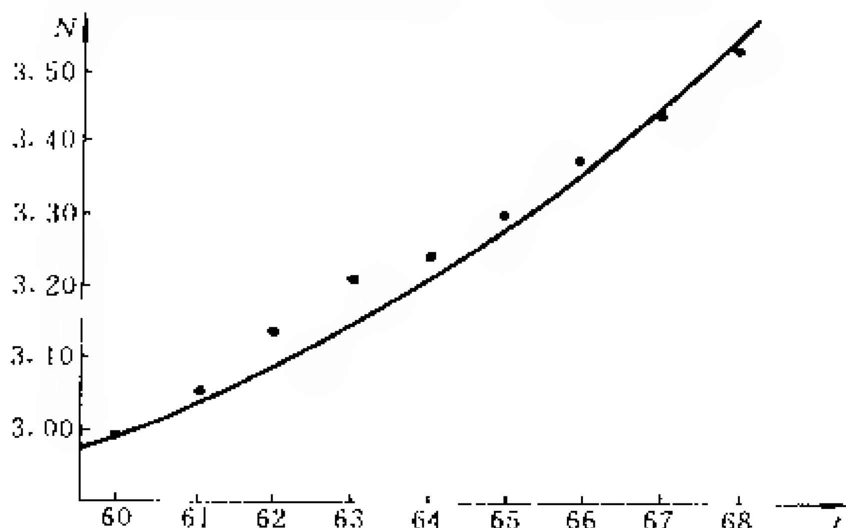


图 148　60 年代世界人口统计数据散点图

思考题： 能否用指数增长模型作长期人口预报？为什么？怎样改进这个模型？(答案：不能，因为指数增长模型假设人口的增长率 r(这里的 $r=0.01757$，为年增长率)是常数，这与实际情况不符. 关于如何改进此模型，可参看参考文献[65]及有关人口问题的专著.)

参考文献： [37],p.30;[65]p.14~18,p.149~156,p.290~295.

149、最优化的产出水平

假设某厂生产两种产品，在生产过程中，两种产品的产量 q_1

和 q_2 是不相关的，但两种产品在生产技术上又是相关的. 这样，不仅总成本 C 是产出量 q_1 和 q_2 的函数：$C=C(q_1,q_2)$，而且两种产品的边际成本（总成本的偏导数称为边际成本，用 MC_1、MC_2 分别表示）也是 q_1 和 q_2 的函数：

$$MC_1=\frac{\partial C}{\partial q_1}=C_1(q_1,q_2),MC_2=\frac{\partial C}{\partial q_2}=C_2(q_1,q_2)$$

经济学中一般总认为产出水平与销售水平是一致的，所以总收益 R 也是 q_1 和 q_2 的函数：$R=R(q_1,q_2)$. 现在的问题是，如何确定每种产品的产量，以使厂商获得最大的利润.

厂商的利润函数是

$$L=R-C=R(q_1,q_2)-C(q_1,q_2)$$

由极值存在的必要条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial q_1}=\dfrac{\partial R}{\partial q_1}-\dfrac{\partial C}{\partial q_1}=MR_1-MC_1=0\\[2ex]\dfrac{\partial L}{\partial q_2}=\dfrac{\partial R}{\partial q_2}-\dfrac{\partial C}{\partial q_2}=MR_2-MC_2=0\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}MR_1=MC_1\\MR_2=MC_2\end{cases}\tag{1}$$

这里 $MR_1=\dfrac{\partial R}{\partial q_1}$，$MR_2=\dfrac{\partial R}{\partial q_2}$是边际收益（总收益的偏导数称为边际收益）.

(1)式说明，工厂为了获得最大利润，每种产品都应达到这样的产出水平，使边际收益恰好等于边际成本.

例 1： 工厂生产两种产品，总成本函数是

$$C=q_1^2+2q_1q_2+q_2^2+5$$

两种产品的需求函数分别是

$$q_1=26-P_1,q_2=10-\frac{1}{4}P_2$$

为使工厂获得最大利润，试确定两种产品的产出水平.

解： 由 $q_1=26-P_1, q_2=10-\frac{1}{4}P_2$ 知两种产品的价格

$$P_1=26-q_1, P_2=40-4q_2$$

于是总收益函数

$$\begin{aligned}R&=P_1q_1+P_2q_2=(26-q_1)q_1+(40-4q_2)q_2\\&=26q_1+40q_2-q_1^2-4q_2^2\end{aligned}$$

根据(1)式，有

$$\begin{cases}26-2q_1=2q_1+2q_2,\\40-8q_2=2q_1+2q_2,\end{cases}\quad 即\begin{cases}2q_1+q_2=13,\\q_1+5q_2=20\end{cases}$$

解之，得 $q_1=5, q_2=3$

可以验证此组解满足极值存在的充分条件，因此，当两种产品的产量分别为 5 和 3 时，工厂获利最大．此时最大利润为

$$\begin{aligned}L&=R-C=(26q_1+40q_2-q_1^2-4q_2^2)-(q_1+q_2)^2-5\\&=26\times5+40\times3-5^2-4\times3^2-(5+3)^2-5=120\end{aligned}$$

现在假设某厂商经营两个工厂，都生产同一产品且在同一市场上销售．由于两厂的经营情况不同，生产成本有所差别．现在的问题是，如何确定每个工厂的产量，使厂商获利最大．

由题意，设两厂的产量分别是 q_1 和 q_2，两厂的成本函数分别为 $C_1=C_1(q_1)$和 $C_2=C_2(q_2)$．于是

总成本函数为　　$C=C_1(q_1)+C_2(q_2)$

总收益函数为　　$R=R(Q)=R(q_1+q_2)$

这里 $Q=q_1+q_2$ 为总产量．因而

利润函数为　$L=R-C=R(Q)-C_1(q_1)-C_2(q_2)$

由极值存在的必要条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial q_1}=\dfrac{dR}{dQ}\cdot\dfrac{\partial Q}{\partial q_1}-\dfrac{dC_1}{dq_1}=0\\[2ex]\dfrac{\partial L}{\partial q_2}=\dfrac{dR}{dQ}\cdot\dfrac{\partial Q}{\partial q_2}-\dfrac{dC_2}{dq_2}=0\end{cases}$$

得　　$R'(Q)=C_1'(q_1)=C_2'(q_2)$，即

$$MR=MC_1=MC_2 \tag{2}$$

(2)式表明，最优产出水平应使每个工厂的边际成本都等于总产出的边际收益.

例 2： 一厂商经营两个工厂，其成本函数分别为 $C_1=3q_1^2+2q_1+6$ 和 $C_2=2q_2^2+2q_2+4$，而价格函数为 $P=74-6Q$，其中 $Q=q_1+q_2$. 为使利润最大，试确定每个工厂的产出水平.

解： 由于 $C_1'(q_1)=6q_1+2$，$C_2'(q_2)=4q_2+2$，而总收益函数和边际收益分别为

$$R=P\cdot Q=74Q-6Q^2,MR=74-12Q$$

故由(2)式，得

$$\begin{cases}74-12(q_1+q_2)=6q_1+2\\74-12(q_1+q_2)=4q_2+2\end{cases}\quad 即\begin{cases}3q_1+2q_2=12\\3q_1+4q_2=18\end{cases}$$

解之，得 $q_1=2,q_2=3$

可以验证此组解满足极值存在的充分条件，因此，当两个工厂的产量分别是 $q_1=2,q_2=3$ 时厂商获利最大. 此时最大利润为

$$\begin{aligned}L&=R-C=74(q_1+q_2)-6(q_1+q_2)^2\\&\quad-(3q_1^2+2q_1+6)-(2q_2^2+2q_2+4)\\&=74\times5-6\times5^2-(3\times2^2+2\times2+6)-(2\times3^2+2\times3+4)\\&=170\end{aligned}$$

参考文献： [8], p. 332～335.

150、蜂房问题

"巢房的精巧构造十分符合需要，如果一个人看到巢房而不备加赞扬，那他一定是个糊涂虫."

——查尔斯·达尔文(Darwin, Ch. R.)

人们很早就注意到了蜂房的形状特征.从外表看,许许多多正六边形的洞完全铺满了一个平面区域.每一个洞是一个六面柱的巢的入口.在这些六面柱的背面,有同样形状的许多洞.如果一组洞开口朝南,则另一组的洞口就朝北.这两组洞彼此不相通,中间是用蜡板隔开的,奇特的是这些隔板是由许多大小相同的菱形组成的.

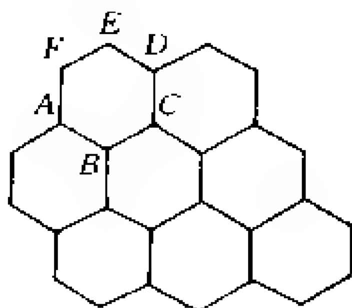


图 150－1　蜂房正面图

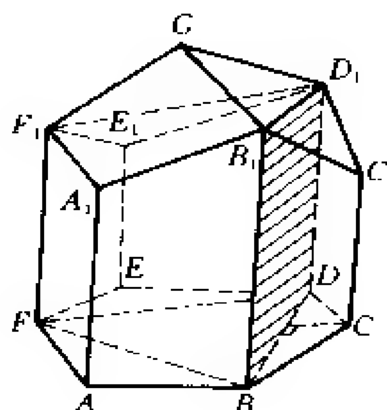


图 150－2　蜂房形状图

图 150－1 是洞口正面,150－2 是一个巢的形状.图中正六边形 $ABCDEF$ 是入口,底是三个菱形 $A_1B_1GF_1$、$GB_1C_1D_1$ 和 $D_1E_1F_1G$.这些菱形蜡板同时又是另一组六面柱洞的底,三个菱形分属于三个相邻的六面柱.

历史上最早注意蜂房的这一特征并加以研究的是古希腊数学家帕普斯(Pappus).后来又有天文学家开普勒(Kepler)、马拉尔第(Maraldi)等人.马拉尔第甚至揭示了作为蜂房底的三个菱形,其钝角等于 109°28′,锐角等于 70°32′!马拉尔第的观察引起了法国物理学家雷奥姆(Reaumur)的兴趣,雷奥姆大胆断言:"用这样的角度来建造蜂房,在相同的容积下材料最省."这个猜测被瑞士数学家柯尼格(Koenig)(他的计算结果与实测值仅差两分)和后来的英国数学家马克劳林(Maclaurin)从理论上做了证明.下面是这个问题的提法和其中的一个解答.

问题的提法：在相同的容积下，一个六面柱由怎样三个全等的菱形作底，其表面积才能最小？

解： 如图 150－2，设正六边形的边长为 $2a$，则对角线

$$BD = BF = DF = 2a\sqrt{3}$$

因作底的三个菱形全等，且菱形 $B_1C_1D_1G$ 的对角线 B_1D_1 平行于底面，即 BB_1D_1D 为矩形，故

$$B_1D_1 = B_1F_1 = D_1F_1 = 2a\sqrt{3}$$

设 G 到平面 $B_1D_1F_1$ 的距离为 x，$GC_1 = GE_1 = GA_1 = 2y$，则 GC_1 在柱体中心轴上的投影为 $2x$，在平面 $A_1C_1E_1$ 上的投影为 $2a$（图 150－3）. 由勾股定理得

$$(2x)^2 + (2a)^2 = (2y)^2$$

即

$$x^2 + a^2 = y^2$$

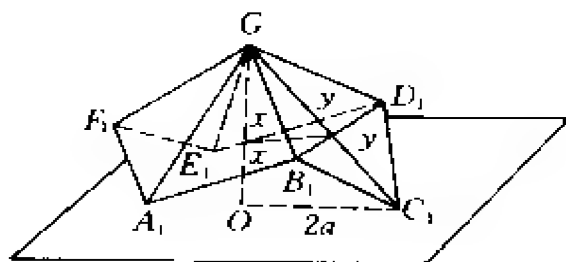


图 150－3 GC_1 的投影图

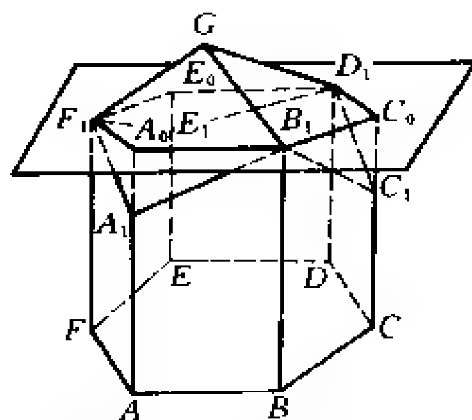


图 150－4 补上棱锥后的六棱柱与蜂房形状关系图

将侧棱 AA_1、CC_1 和 EE_1 延长，与平面 $B_1D_1F_1$ 分别相交于 A_0、C_0 和 E_0（图 150－4），则补上三个棱锥后所得的六棱柱之体积与蜂房容积相等（因补上的三个小棱锥体积之和正好等于 $G-B_1D_1F_1$ 的体积），但是面积却有变化：原蜂房表面积减少了 $6\sqrt{3}a^2 + 6ax$（一个六边形 $A_0B_1C_0D_1E_0F_1$ 与 $A_1B_1A_0$ 等六个

直角三角形面积之和)，而只增加了$6\sqrt{3}ay$($A_1B_1GF_1$等三个菱形面积之和)，于是蜂房的表面积比六棱柱的表面积节省了

$$6\sqrt{3}a^2+6ax-6\sqrt{3}ay$$

问题归结为在条件$x^2+a^2-y^2=0$下求函数$Z=6\sqrt{3}a^2+6ax-6\sqrt{3}ay$的极大值.

构造函数

$$F(x,y,\lambda)=6\sqrt{3}a^2+6ax-6\sqrt{3}ay+\lambda(x^2+a^2-y^2)$$

求其对x、y、λ的偏导数，并使之为零，得

$$\begin{cases}6a+2\lambda x=0\\ -6\sqrt{3}a-2\lambda y=0\\ x^2+a^2-y^2=0\end{cases}$$

解此方程组，得

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}},y=\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{2}}$$

(这里舍去了x、y均取负值的另一组解)，由问题本身知最大值一定存在，故必在此点取得.

由$GC_1=2y=\sqrt{6}a$，$B_1D_1=2\sqrt{3}a$，知

$$\mathrm{tg}\angle D_1B_1C_1=\frac{y}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathrm{tg}\angle GB_1C_1=\mathrm{tg}2\angle D_1B_1C_1=\frac{2\mathrm{tg}\angle D_1B_1C_1}{1-\mathrm{tg}^2\angle D_1B_1C_1}$$

$$=2\sqrt{2}$$

所以 $\angle GB_1C_1=70.52877937°\approx70°32'$

于是 $\angle B_1GD_1=180°-70°32'=109°28'$

谁能想到小小蜜蜂竟是如此卓越的建筑师!

蜂房的奇妙结构不仅引起了数学家的注意，也使材料工艺师、特别是飞机结构工艺师得到启发.为了节省材料，减轻飞机重量，

他们设计了"蜂窝式夹层"结构.这种结构的中间充满了孔洞,在两端面上有两层金属板固定,这样的结构要比实心的强度高,隔音隔热性能好,而重量只有实心的几分之一.当然,在其它工程应用中,蜂窝式夹层也同样表现出巨大的优越性.

参考文献: [10],p.264~268;[11],p.1~32;[15],数学1,p.205~207.

151、在确定的预算下,劳动力与资本的最佳配置

在经济学中有个 Cobb - Douglas 生产函数的模型 $f(x,y)=cx^a y^{1-a}$,式中 x 代表劳动力的数量,y 为资本数量(确切地说是 y 个单位资本),c 与 $a(0<a<1)$ 是常数,由各工厂的具体情形而定.函数值表示生产量.

现在已知某制造商的 Cobb - Douglas 生产函数是 $f(x,y)=100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$,每个劳动力与每单位资本的成本分别是 150 元及 250 元.该制造商的总预算是 50 000 元.问他该如何分配这笔钱于雇用劳力与资本,以使生产量最高.

解: 这是个条件极值问题.求在条件

$$150x+250y=50\,000 \text{ 下}$$

$$f(x,y)=100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} \text{ 的最大值.}$$

令 $F(x,y,\lambda)=100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}+\lambda(50\,000-150x-250y)$

得
$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=75x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}-150\lambda=0 & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=25x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}-250\lambda=0 & (2)\\ 50\,000-150x-250y=0 & (3)\end{cases}$$

由(1)式解得 $\lambda=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}$ 代入(2)式

得 $$25x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}-125x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}=0$$

上式两边同乘 $x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$，有

$$25x-125y=0$$

即 $x=5y$ 代入(3) $\quad y=50, x=250.$

即该制造商应该雇用 250 个劳动力而把其余的部分作为资本投入，这时可获得最大产量.

$$f(250,50)=16\ 719$$

参考文献： [23], p. 422~423.

152、抵押贷款与分期付款购物分析

一、抵押贷款——从购买公房谈起.

《报刊文摘》1994 年 3 月 3 日载："职工购买公房，一次性付清房款的，可申请抵押贷款，贷款部分不超过房价的 70%，限期 25 年，利率高于银行存款利率."

问题 1: 小李夫妇要购买二居室一套的公房，共十万元一次付清. 他们自己可以设法筹借到 4 万元，另外 6 万元申请抵押贷款. 月利率为 1%，期限 25 年. 试问小李夫妇每月要还多少钱.

解： 时间单位为月，设抵押贷款期限为 N 个月，贷款额为 A_0. 月利率为 R，按复利计算，每月还钱 x，还款约定从借款日的下一个月开始. 于是开始还款的第一个月还了 x 后还欠款(简称第一个月还欠款，下同).

$$A_1=(1+R)A_0-x$$

第二个月还欠款： $A_2=(1+R)A_1-x$

第三个月还欠款： $A_3=(1+R)A_2-x$

……

第 N 个月还欠款： $A_N=(1+R)A_{N-1}-x$

这是一种特殊的差分方程.逐项代入即得

$$A_N = A_0(1+R)^N - x[(1+R)^{N-1} + \cdots + 1]$$

$$A_N = A_0(1+R)^N - x\frac{(1+R)^N - 1}{R} \tag{1}$$

N 月还清,即 $A_N = 0$,由(1)可解出

$$x = \frac{A_0R(1+R)^N}{(1+R)^N - 1} \tag{2}$$

对于小李夫妇来说,$A_0 = 60\ 000$,$R = 0.01$,$N = 300$,所以 $x \doteq 631.93$ 元

思考题: 1. 若 $R = 0.015$,$x = ?$ ($x \doteq 910.46$)

2. 若 $R = 0.01$,$N = 240$,$x = ?$ ($x \doteq 660.65$)

3. 若希望每月还的钱最少,应选择的利率大小和借期的最佳值应是什么?

4. 如果小李夫妇每月只能归还 500 元,他们应采取什么措施才能通过抵押贷款来购房.

问题 2:正当小李夫妇想去办理上述抵押贷款时,他们看到某借贷公司的一则广告:"顾客们,我们可以在不增加还款数额的条件下帮您们提前还清欠款."小李夫妇走进了借贷公司,接待他们的雇员针对他们情况提出:"您们每两星期向我们交 316 元(631.93 元的一半),您们即可提前三年了结债务,但为了信誉,要求您们先预付三个月的还款."小李夫妇对此很动心,但又不太懂,不知道该向哪一家借贷.他们去请教了一位数学界的朋友吴先生,吴先生做了如下分析,使小李夫妇明白了该怎么办.同时,再一次感到数学太重要了.吴先生的分析是:

1. 缩短还款间隔可以缩短还款时间,但远达不到 3 年.因为两星期还一次相当于半个月还一次.在(2)式中,只需用 $R = \frac{0.01}{2} = 0.005$.代入求 N 即可,对 N 有如下公式

$$N = \ln\left(\frac{x}{x - A_0R}\right) \Big/ \ln(1+R) \tag{3}$$

用 $x=316, A_0=60\ 000, R=0.005$,代入得 $N\approx 598$(半月)$=299$ 月.即最多只能提前一个月还清.

2. 缩短 3 年期限的关键是预付 3 个月的还款.因为这样实际上小李夫妇只借了 $A_0=60\ 000-3\times 632=58\ 104$ 元,再代入(3)式得

$$N\approx 505(\text{半月})=252.5(\text{月})$$

可提前 47.5 个月.所以如果小李夫妇只借 58 104 元(相当预付三个月的还款).并且每两周还 316 元他们差不多用 21 年即可还清欠款.借贷公司的利润是多少,不很清楚吗?

二、分期付款购物

某人看到一则广告:某商店对电视机进行分期付款销售.一台售价为 4 000 元的电视机,如果分 36 个月付款,每月付 150 元即可.另外,他又得到一则银行贷款的消息:5 000 元以下的贷款,在 3 年内分期还清,年利率为 15%.现在他想买一台上述标价的电视机,他应该向银行贷款呢?还是直接向商店分期付款?

解: 我们只要计算他向银行贷款,分三年还清,每月要还多少钱即可.

利用公式(2).年利率 15%,月利率 $R=\frac{1}{12}\cdot 15\%=1.25\%$,$N=36$,所以

$$x=\frac{4000\cdot\frac{1.25}{100}(1+0.0125)^{36}}{(1+0.0125)^{36}-1}\doteq 138.66(\text{元})$$

显然,他应该向银行贷款.

下一个问题是:如果他向商店分期付款,商店实际上征收了多少的利率?

他向商店分期付款,实质上是向商店借了 4 000 元,每月还 150 元,36 个月还清.求利率,就是在公式(2)中,已知 x, N, A_0 求 R,即从

$$(1+R)^N A_0 = \frac{(1+R)^N - 1}{R}x$$

中求 R. 它可用牛顿迭代法求解.(牛顿法参见 109 例)我们也可用另一种近似解法. 由上知,当月利率为 1.25%时,每月要还 138.66(元). 现在看月利率为 2.5%时,每月要还多少? 通过计算知要还 169.80 元. 对比

年利率 15%(月利率 1.25%)每月还 138.66 元

年利率 30%(月利率 2.5%)每月还 169.80 元

在 15%与 30%之间用优选法:$(30-15)\cdot 0.618=9.27$. 因为年利率为 30%时,还款额偏离 150 较大,所以用 $30-9=21$,即年利率为 21%(月利率为 1.75%)试算,得 $x=150.7$ 元. 所以商店向顾客实际征收了差不多是 21%的年利率.

三、这类问题与微分方程的关系:

因为
$$A_N = A_{N-1}(1+R) - x \tag{4}$$

$$\therefore \quad A_N - A_{N-1} = A_{N-1}R - x$$

若取时间间隔不是单位时间,而是 Δt,记

$$A_N = A(t_N),\ A_{N-1} = A(t_{N-1}).\ \Delta t = t_N - t_{N-1} (\neq 1).$$

则(4)式是,$A(t_N) = A(t_{N-1})(1+R\cdot\Delta t) - x\Delta t$.

$$\therefore \quad A(t_N) - A(t_{N-1}) = A(t_{N-1})R\Delta t - x\Delta t$$
$$= (A(t_{N-1})R - x)\Delta t$$

故
$$\frac{A(t_{N-1}+\Delta t) - A(t_{N-1})}{\Delta t} = A(t_{N-1})R - x$$

记 $t_{N-1}=t$,令 $\Delta t \to 0$ 得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} = RA(t) - x \\ A(0) = A_0 \end{cases}$$

解得 $A(t) = A_0 e^{Rt} + \dfrac{x[e^{Rt} - 1]}{R}$ 由于 $e^{Rt} \sim (1+R)^t$ ($\because e^R \sim 1+R$)代入,并令 $t=N$,记 $A(N)=A_N$,得

$$A_N = A_0(1+R)^N - \frac{x[(1+R)^N - 1]}{R}$$

参考文献： [37],p.8~9.

153、火箭发射后地球对火箭引力减小的速率是多少

当火箭从地面发射后，它的质量以 40 千克/秒的速度减少(由燃料的消耗引起的)．当火箭离地球中心 6378 公里时，火箭的速度是 100 公里/秒，火箭的质量为 m_1，问这时的地球对火箭的引力 F 减小的速率是多少？

解： 由万有引力定律，地球对火箭的引力为 $F=\frac{GMm}{r^2}$，其中 G 为万有引力系数；M 为地球的质量；m 为火箭的质量，它是时间 t 的函数，记为 $m(t)$；r 是火箭到地球中心的距离，它也是时间 t 的函数，记为 $r(t)$．

$$\therefore \qquad F(t)=\frac{GM\cdot m(t)}{r^2(t)}=f(m(t),r(t))$$

现在要求$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$在 $r=6378$ 处的值．

由复合函数求导法则

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial m}\cdot\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

$$=GM\left(\frac{1}{r^2}m'(t)-\frac{2m}{r^3}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)$$

于是

$$\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right|_{r=6378}=GM\left(\frac{1}{(6378)^2}\cdot(-40)-\frac{2m_1}{(6378)^3}\cdot 100\right)$$

$$-\frac{-GM}{(6378)^2}\left(40+\frac{200m_1}{6378}\right)$$

参考文献： [25],下册,p.228.

154、怎样确定电视机的最优价格

某电视机厂生产一台电视机的成本为 c,每台电视机的售价为 p.该厂的生产处于平衡状态,即电视机的生产量等于销售量.

由于市场竞争的影响,电视机售价越高,销售量 x 就会越低.根据市场调查可以确定

$$x=Me^{-ap}\quad (M,a>0)$$

其中 M 是市场的最大需求量,a 是价格系数.

另一方面,售销量 x 越大,每台电视机的生产成本就会越低.根据对生产环节的分析可知

$$c=c_0-k\ln x\quad (c_0,k>0,x>1)$$

其中 c_0 是只生产一台电视机时的成本,k 是规模系数.

根据上述条件,应该如何确定电视机的售价 p,才能使该厂获得最大利润?

解： 设利润为 u,电视机售价为 p,成本为 c,销售量为 x.则

$$u=(p-c)x$$

由于市场机制的约束,x,p,c 之间有如下关系

$$x=Me^{-ap}\tag{1}$$

$$c=c_0-k\ln x\tag{2}$$

因此,求最大利润是一个带约束的条件极值问题,我们采用 Lagrange 乘数法求解.令

$$L(x,p,c)=(p-c)x+\lambda(x-Me^{-ap})+\mu(c-c_0+k\ln x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=(p-c)+\lambda+k\frac{\mu}{x}=0\tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = x + \lambda M a \mathrm{e}^{-ap} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c} = -x + \mu = 0 \tag{5}$$

将(1)代入(2)
$$c = c_0 - k(\ln M - ap) \tag{6}$$

由(4)可知
$$\lambda a = -1, \text{即 } \lambda = -\frac{1}{a} \tag{7}$$

由(5)可知
$$x = \mu, \text{即} \frac{x}{\mu} = 1 \tag{8}$$

将(6)、(7)、(8)代入(3)

$$p - c_0 + k(\ln M - ap) - \frac{1}{a} + k = 0$$

由此可得
$$p^* = \frac{c_0 - k\ln M + \frac{1}{a} - k}{1 - ak} \tag{9}$$

这就是电视机的最优价格.

思考题: 已知仅生产一台电视机的单位成本是 5000 元/台,生产 10000 台电视机时的单位成本是 3000 元/台.根据市场调查,当地的电视机年需求量为 100 万台,该厂的电视机去年每台售价为 3000 元,共售出 4.9 万台.若需求方式与生产方式都不改变,试确定出今年电视机的最佳销售价格.

提示:最佳售价依(9)式确定.现 $c_0 = 5000$ 元,$M = 100$ 万,但仍要求得 a 及 k 的值.

据(2)可知
$$k = \frac{c(x) - c_0}{-\ln x}$$

将 $c(x) = 3000$ 元,$x = 10000$ 台代入,

$$k = \frac{5000 - 3000}{\ln 10000} \doteq 217$$

据(1)可知
$$a = \frac{\ln M - \ln x}{p}$$

将 $x = 4.9$ 万台,$M = 100$ 万台,$p = 3000$ 元代入,

$$a=\frac{\ln1000000-\ln49000}{3000}\doteq0.001$$

将 M, c_0, k, a 代入(9)

$$p^*=\frac{5000-217\ln1000000+\dfrac{1}{0.001}-217}{1-0.001\times217}\doteq3556.88\text{ 元}$$

参考文献： [65],p.92.

155、如何确定面膨胀系数

设有一块很薄的矩形平板，由于它的结构关系，其各向的膨胀系数均不相同，例如在某些晶体中，垂直于一主轴切割一薄片，此薄片的各边和其它两个轴相平行．如将此片加热，则在两个主要方向上，膨胀并不是一样的，但仍保持其矩形的形状．试求它的热膨胀系数 ε.

解： 将此矩形片加热，设温度 t 时，薄片的面积为 $F(t)$，若矩形两边长分别为 $x(t)$及 $y(t)$，则

$$F(t)=x(t)y(t)$$

由面膨胀系数的定义可知，ε 是单位面积上面积对温度的变化率．因此

$$\varepsilon=\frac{\dfrac{dF}{dt}}{F}$$

因为 $F=xy, x=x(t), y=y(t)$，由二元复合函数求导法则，有

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}=y\frac{dx}{dt}+x\frac{dy}{dt}$$

所以，
$$\varepsilon=\frac{1}{F}\left(y\frac{dx}{dt}+x\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\qquad(1)$$

式中，$\frac{dx}{dt}$、$\frac{dy}{dt}$分别是沿两个主要方向的线膨胀系数.

如果假设 $x=y=1$，这时由公式(1)就得到面积的膨胀系数：

$$\varepsilon=\frac{dF}{dt}=\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt} \tag{2}$$

上式说明，面膨胀系数等于两个主要方向的线膨胀系数之和.

如果 x,y 与 t 的函数式为线性关系，例如

$$x=1+\alpha t, y=1+\beta t$$

于是$\frac{dx}{dt}=\alpha$，$\frac{dy}{dt}=\beta$，

所以面膨胀系数为：

$$\varepsilon=\frac{dF}{dt}=\alpha+\beta \tag{3}$$

与上面情形类似，也可以求出沿三个轴作不均匀膨胀的平行六面体的体膨胀系数.例如，某些晶体，其边与三个主要晶轴相平行.如各边等于 x、y 和 z，则体积为

$$V=xyz$$

和上面一样，当 $x=y=1$ 时，体膨胀系数为

$$\varepsilon=\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt} \tag{4}$$

即立方体的体膨胀系数等于各线膨胀系数之和.

(4)式不论 x、y 和 z 对于 t 的关系怎样，都是成立的.在最简单的情况下，当

$$x=1+\alpha t, y=1+\beta t, z=1+\gamma t$$

这时，$\varepsilon=\alpha+\beta+\gamma$.

对于各向同性体，$\alpha=\beta=\gamma$，即得熟知的公式

$$\varepsilon=\frac{dV}{dt}=3\alpha$$

即体膨胀系数等于线膨胀系数的 3 倍.

参考文献：[32],p.17～18.

156、如何才能使回收醋酸的效果最好

在 A、B 两种物质的溶液中，我们想提取出物质 A，可以采取这样的方法：在 A、B 的溶液中加入第三种物质 C，而 C 与 B 不互溶，利用 A 在 C 中的溶解度较大的特点，将 A 提取出来．这种方法就是化工中的萃取过程．

现在有稀水溶液的醋酸，利用苯作为溶剂，设苯的总体积为 m．进行 3 次萃取来回收醋酸．问每次应取多少苯量，方使从水溶液中萃取出的醋酸最多？

解： 设水溶液醋酸的体积为 a，水溶液中醋酸的初始浓度为 x_0，并设每次萃取时都遵守下列定律：

$$y_i = kx_i \quad (i=1,2,3) \tag{1}$$

式中 k 为常数，y_i、x_i 分别表示第 i 次萃取时苯中的醋酸重量浓度及水溶液中醋酸重量浓度，下标 i 是指萃取的顺序．

设将苯的总体积 m 分为 m_1、m_2 和 m_3 三份．

对第一次萃取作醋酸量的平衡计算，即

醋酸的总量＝苯中醋酸的量＋水溶液中醋酸的量．

由醋酸的物料平衡计算，得

$$ax_0 = m_1y_1 + ax_1 \tag{2}$$

将(1)式代入(2)式，得

$$ax_0 = (m_1k + a)x_1$$

由此得

$$x_1 = \frac{ax_0}{a + m_1k} \tag{3}$$

同理，对第二次萃取，可得

$$x_2 = \frac{ax_1}{a + m_2k} \tag{4}$$

对第三次萃取,可得

$$x_3 = \frac{ax_2}{a + m_3 k} \tag{5}$$

将(3)式代入(4)式,得

$$x_2 = \frac{a^2 x_0}{(a + m_1 k)(a + m_2 k)} \tag{6}$$

将(6)式代入(5)式,得

$$x_3 = \frac{a^3 x_0}{(a + m_1 k)(a + m_2 k)(a + m_3 k)} \tag{7}$$

为了在一定苯量时得到最完全的萃取,x_3 应为极小值.因为 $a^3 x_0$ 是常数,所以只需考虑(7)式右端分母的极大值,为此,设

$$u = u(m_1, m_2, m_3) = (a + m_1 k)(a + m_2 k)(a + m_3 k).$$

现在求函数 u 在条件 $m_1 + m_2 + m_3 = m$ 下的极值,利用拉格朗日乘数法求解.设辅助函数

$$\begin{aligned} \varphi = & (a + m_1 k)(a + m_2 k)(a + m_3 k) \\ & + \lambda(m_1 + m_2 + m_3 - m) \end{aligned}$$

由

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial m_1} = k(a + m_2 k)(a + m_3 k) + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial m_2} = k(a + m_1 k)(a + m_3 k) + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial m_3} = k(a + m_2 k)(a + m_2 k) + \lambda = 0 \end{cases} \tag{8}$$

解得

$$m_1 = m_2 = m_3 = \frac{m}{3}.$$

不难验证,这时 u 取得最大值,从而 x_3 取得最小值.也不难看出,这个结果是一般性的,因而,为了使萃取出物质最多,无论将溶剂总量 m 分成多少份,各次应采用等量的溶剂.

参考文献: [32],p.22~23.

157、你会求使旋转体的表面积最小的曲线吗

设通过两点(a,A),(b,B)的曲线用$y=y(x)$表示,将此曲线绕x轴旋转得一旋转曲面.问如何选取曲线$y=y(x)$方能使旋转面的面积为最小?

解: 解决这个问题需要用到变分法.一般说,变分法就是求下述形式的定积分(设$y=y(x)$)

$$I=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{1}$$

的极值问题,式(1)这种函数叫做泛函.像函数的微分理论中的极值问题一样,泛函理论中也有极值问题.变分法研究的对象就是求泛函的极值.

在一定的条件下,可以证明:使式(1)取得极值时的函数$y=y(x)$必须满足(证明从略):

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \tag{2}$$

方程(2)称为变分法中的欧拉(Euler)方程.

当(1)式中的F不显含x时,即$F=F(y,y')$,这时(2)式两端同乘以$-y'$,则得

$$y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-y'\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

即

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 \tag{2'}$$

由于$F=F(y,y')$,根据二元复合函数求导法则,有

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}$$

所以

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}-\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}$$

将上式代入(2′),得

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}+\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=0 \qquad (2'')$$

由于

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F\right)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\\&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\\&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

所以(2″)式左端等于$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F\right)$，于是(2″)式就化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F\right)=0,\quad 即\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

将上式两边对 x 积分，得

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F=C(C 为常数) \qquad (3)$$

(3)式就是当(1)式中的 F 不显含 x，即 $F=F(y,y')$时，使 I 取得极值，$y=y(x)$应该满足欧拉(Euler)方程. 现在来解决开始提出的问题. 由熟知的旋转面的面积公式

$$I=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x$$

来求使 I 最小的曲线 $y=y(x)$.

这时(1)式中的函数 F 为

$$F=y\sqrt{1+(y')^2}$$

由于函数 F 不显含 x，所以 $y=y(x)$应满足欧拉方程(3)，注意到$\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}}$，所以(3)式化为

$$y'\cdot\frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}}-y\sqrt{1+(y')^2}=C.$$

所以

$$y=C_1\sqrt{1+(y')^2}$$

即
$$y' = \sqrt{\frac{y^2}{C_1^2} - 1}$$

上方程为变量可分离方程：
$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 - C_1^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{C_1}$$

两端积分，得
$$y = C_1 \mathrm{ch}\left(\frac{x}{C_1} + C_2\right) = \frac{C_1}{2}\left[e^{\frac{x}{C_1}+C_2} + e^{-\left(\frac{x}{C_1}+C_2\right)}\right]$$

这是悬链线方程，其积分常数由边界条件决定.

思考题： 如果给出边界条件，即设端点 $-a = b = l, A = B = h$，试讨论解的情况.

参考文献： [33], p.503～505.

158、尿素的清除率

肾的一个重要的功能是清除血液中的尿素．临床上在尿量小时，为减少尿量变动对所测尿素清除率值的影响，通常采用尿素标准清除率计算法，即 $C = \frac{U\sqrt{V}}{P}$，其中 U 表示尿中的尿素浓度，V 表示每分钟排出的尿量，P 表示血液中的尿素浓度．正常人尿素标准清除率约为 54．某病人的实验室测量值为 $U = 500, V = 1.44, P = 20$，则 $C = 30$．若每一测量值的误差最大不超过 1%，试估算 C 的最大绝对误差和相对误差.

解： U、V、P 的误差最大不超过 1%，即：
$$\left|\frac{\mathrm{d}U}{U}\right| \leqslant 1\%,\ \left|\frac{\mathrm{d}V}{V}\right| \leqslant 1\%,\ \left|\frac{\mathrm{d}P}{P}\right| \leqslant 1\%,$$

所以 $|\mathrm{d}U| \leqslant 5, |\mathrm{d}V| \leqslant 0.0144, |\mathrm{d}P| \leqslant 0.2$

由全微分公式：

$$dC \doteq \frac{\partial C}{\partial U}dU + \frac{\partial C}{\partial V}dV + \frac{\partial C}{\partial P}dP$$

由 $C=\frac{U\sqrt{V}}{P}$，得 $\frac{\partial C}{\partial U}=\frac{\sqrt{V}}{P}$，$\frac{\partial C}{\partial V}=\frac{U}{2P\sqrt{V}}$，$\frac{\partial C}{\partial P}=-\frac{U\sqrt{V}}{P^2}$

当　$U=500$，$V=1.44$，$P=20$ 时

$$\frac{\partial C}{\partial U}=0.06,\frac{\partial C}{\partial V}=125/12,\frac{\partial C}{\partial P}=-1.5$$

$$|dC| \leqslant \left|\frac{\partial C}{\partial U}\right||dU| + \left|\frac{\partial C}{\partial V}\right||dV| + \left|\frac{\partial C}{\partial P}\right||dP|$$

$$\leqslant 0.06\times 5+125/12\times 0.0144+1.5\times 0.2=0.75$$

$$\frac{|dC|}{|C|}\leqslant\frac{0.75}{30}=2.5\%$$

C 的最大绝对误差为 0.75，最大相对误差为 2.5%.

参考文献：　[45]，[47]，p.359.

159、大气污染指数的影响因素

一个城市的大气污染指数 P 取决于两个因素，空气中固体废物的数量 x 和空气中有害气体的数量 y，在某种情况下 $P=x^2+2xy+4xy^2$.

试说明 $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{(a,b)}$，$\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{(a,b)}$ 的意义，并计算 $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{(10,5)}$，$\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{(10,5)}$. 当 x 增长 10% 或 y 增长 10% 时，用偏导数估算 P 的改变量.

解：　$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{(a,b)}$ 的意义：如果空气中有害气体的数量 y 为一常数 b，空气中固体废物的数量 x 是变化的，那么当 $x=a$ 有一个单位的改变时，大气污染指数 P 大约改变 $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{(a,b)}$ 个单位.

同样地，可以说明 $\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{(a,b)}$ 的意义.

$$\frac{\partial P}{\partial x}=2x+2y+4y^2,\frac{\partial P}{\partial y}=2x+8xy$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{(10,5)}=20+10+100=130$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{(10,5)}=20+400=420$$

设空气中有害气体的量 $y=5$，且固定不变，当空气中固体废物的量 $x=10$ 时，P 对 x 的变化率等于 130. 当 x 增长 10%，即 x 从 10 到 11，P 将增长大约 $130\times1=130$ 个单位（事实上，$P(10,5)=1200$，$P(11,5)=1331$，P 增长了 131 个单位）.

同样地，设空气中固体废物的量 $x=10$ 且固定不变，当空气中有害气体的量 $y=5$ 时，P 对 y 的变化率等于 420. 当 y 增长 10%，即 y 从 5 到 5.5，增长 0.5 个单位时，P 大约增长 $420\times0.5=210$ 个单位（事实上，$P(10,5)=1200$，$P(10,5.5)=1420$，P 增长了 220 个单位）.

因此，大气污染指数对有害气体增长 10% 比对固体废物增长 10% 更为敏感.

参考文献： [45]，p.320.

160、广告的费用及其效应

某装饰材料公司欲以每桶 2 元的价钱购进一批彩漆. 为了尽快收回资金并获得较多的赢利，公司经理李先生打算做广告，于是便找到广告公司的王先生进行咨询. 李经理认为，随着彩漆售价的提高，预期销售量将减少，并对此进行了估算（见表 160.1）. 他问王先生广告有多大的效应. 王先生说："投入一定的广告费后，销售量将有一个增长，这由销售增长因子来表示. 例如，投入 3 万元的广告费，销售增长因子为 1.85，即销售量将是预期销售量的 1.85 倍. 根据经验，广告费与销售增长因子的关系有表 160.2."李经理

听后，迫切想知道最佳广告费和售价为多少时预期的利润最大．王先生经过计算，给出了下面的解答．

表 160.1　售价与预期销售量

售价	预期销售量(千桶)
2.00	41
2.50	38
3.00	34
3.50	32
4.00	29
4.50	28
5.00	25
5.50	22
6.00	20

表 160.2　广告费与销售增长因子

广告费(元)	销售增长因子
0	1.00
10 000	1.40
20 000	1.70
30 000	1.85
40 000	1.95
50 000	2.00
60 000	1.95
70 000	1.80

解：　分别将表 160.1、表 160.2 中的数据绘成图 160－1、图 160－2．从图 160－1 可以看出，数据点近似于一条直线；从图 160－2 可以看出，数据点近似于一条二次曲线．

设 x 为预期销售量，y 为售价，z 为广告费，k 为销售增长因子，c 为每桶彩漆的价钱，由图 160－1，图 160－2，令

$$x = ay + b \tag{1}$$

$$k = dz^2 + ez + f \tag{2}$$

系数 a, b, d, e, f 待定（若 a, d 是负的，则(1)、(2)式反映了图 160－1、图 160－2 的数量关系）．

投入广告费后，实际销售量 s 等于预期销售量乘以销售增长因子，即 $s = kx$．所获得的利润

$$\begin{aligned} P &= \text{收入} - \text{支出} \\ &= \text{销售收入} - \text{购进彩漆的费用} - \text{广告费} \\ &= sy - sc - z = s(y - c) - z = kx(y - c) - z \\ &= (dz^2 + ez + f)(ay + b)(y - c) - z \end{aligned}$$

即 P 是 y、z 的函数 $P(y, z)$．

要求利润 P 的最大值，也就是要求 $P = P(y, z)$ 的极值．根据

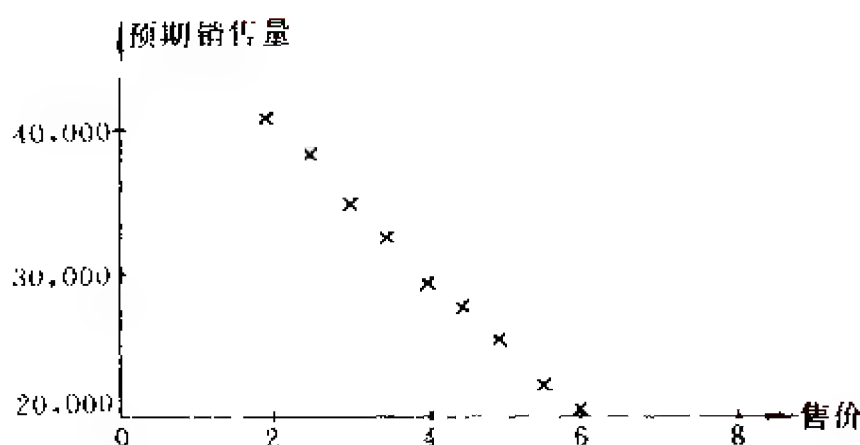


图 160－1　售价与预期销售量的对应

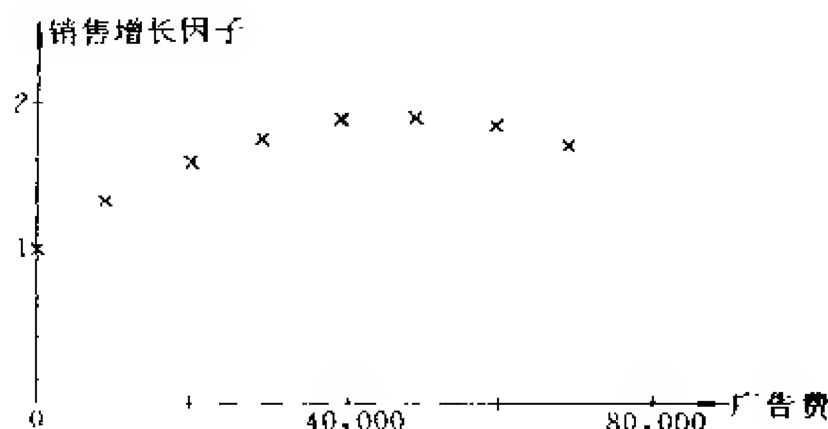


图 160－2　广告费与销售增长因子的对应

多元函数极值原理，

令　$\frac{\partial P}{\partial y}=0, \frac{\partial P}{\partial z}=0$，则得下列方程组：

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y}=(dz^2+ez+f)(2ay+b-ac)=0 & (3) \\ \frac{\partial P}{\partial z}=(2dz+e)(ay+b)(y-c)-1=0 & (4) \end{cases}$$

由(3)得 $dz^2+ez+f=0$ 或 $2ay+b-ac=0$　$dz^2+ez+f=0$ 等价于 $k=0$，此种情况不在考虑范围内，舍去．因此有 $2ay+b-ac=0$，即

$$y=\frac{ac-b}{2a} \tag{5}$$

将 $y=\dfrac{ac-b}{2a}$ 代入(4)式,得下式

$$z=\frac{1}{2d(ay+b)(y-c)}-\frac{e}{2d} \tag{6}$$

用最小二乘法对表 160.1 中的数据做直线拟合,得 $a=-5133$,$b=50420$;对表 160.2 中的数据做二次曲线拟合,得 $d=-4.256\times10^{-10}$,$e=4.092\times10^{-5}$,$f=1.019$.

将 a、b、c、d、e、f 的值代入(5)、(6)式,得 $y=5.91$,$z=33113$;将 a,b,y 的值代入(1)式,得 $x=20084$;将 d,e,f,z 的值代入(2)式,得 $k=1.91$.

从上面的计算可知,投入 33113 元的广告费后,实际销售量为 $kx=38360$,利润为 116875 元.

参考文献: [48],p.79~84.

161、最大利润问题

某公司在生产中使用Ⅰ和Ⅱ两种原料,已知Ⅰ和Ⅱ两种原料分别使用 x 单位和 y 单位可生产 U 单位的产品,这里

$$U(x,y)=8xy+32x+40y-4x^2-6y^2$$

并且第Ⅰ种原料每单位的价值为 10 美元,第Ⅱ种原料每单位的价值为 4 美元,产品每单位的售价为 40 美元,求该公司的最大利润.

解: 生产 $U(x,y)$ 单位的产品的总成本为 $10x+4y$,总收入为 $40U(x,y)$,从而利润函数为

$$\begin{aligned}P(x,y)&=40U(x,y)-10x-4y\\&=40(8xy+32x+40y-4x^2-6y^2)-10x-4y\\&=320xy+1270x+1596y-160x^2-240y^2\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 320y + 1270 - 320x = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 320x + 1596 - 480y = 0 \end{cases}$$

解得驻点$(x_0, y_0) = (21.88125, 17.9125)$

又$\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -320, \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -480, \dfrac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = 320$

在(x_0, y_0)点判别式$= \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}\right)^2 = 51200 > 0$ 而$\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} < 0$，故 $P(x, y)$在(x_0, y_0)点达到最大值，即该公司的最大利润为

$$P(21.88125, 17.9125) \approx 28189(\text{美元})$$

思考题： 若第Ⅰ、Ⅱ种原料每单位的售价均为 10 美元，产品每单位的售价为 30 美元，求该公司的最大利润(20962 美元).

参考文献： [1]，下册，p.314.

162、弦振动方程

演奏弦乐器(如提琴、二胡)的人用弓在弦上来回拉动. 弓所接触的只是弦的很小一段，似乎应该只引起这个小段的振动. 实际上，振动总是传播到整根弦，弦的各处都振动起来. 人们力求用数学方法研究这种弦振动传播现象.

考虑一根绷紧的弦，它在不振动时是一根直线，就取此直线作为 x 轴. 在时刻 $t=0$ 将此弦拨动一下使其振动. 令 $u(x, t)$表示弦上对应于横坐标 x 的点在时刻 t 的横向位移. 则用讨论张力的方法可推得 $u(x, t)$满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

其中 a 为常数，称为弦振动方程. 试解此方程.

解： 作代换$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(\xi+\eta) \\ t = \dfrac{1}{2a}(\xi-\eta) \end{cases}$ 即$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases}$

则 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t} = a\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t}\right]$$

$$= a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$$

代入原方程得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta} = 0$$

先对 η 积分，得$\dfrac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi)$

再对 ξ 积分，就得到通解

$$u = \int f(\xi)\mathrm{d}\xi + f_2(\eta) \triangleq f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

$$= f_1(x+at) + f_2(x-at)$$

其中 f_1, f_2 为任意函数.

通解有很鲜明的物理意义.事实上，凡 $f(x-at)$形状的函数描述的是沿 x 的正方向传播的波，其速度为 a.而 $f(x+at)$形状的函数描述的是沿 x 的负方向传播的波，其速度也为 a.

参考文献： [63],p.149～151,p.189～191.

163、如何购物最满意

日常生活中，人们常常碰到如何分配定量的钱来购买两种物品的问题．由于钱数固定，则如果购买其中一种物品较多，那么势必要少买（甚至不再能买）另一种物品，这样就不可能很令人满意．如何花费给定量的钱，才能达到最满意的效果呢？经济学家试图借助“效用函数”来解决这一问题．所谓效用函数，就是描述人们同时购买两种产品各 x 单位、y 单位时满意程度的量．常见的形式有

$$U(x,y)=x+y$$

$$U(x,y)=\ln x+\ln y \text{ 等},$$

而当效用函数达到最大值时，人们购物分配的方案最佳．

例： 小孙有 200 元钱，他决定用来购买二种急需物品：计算机磁盘和录音磁带．且设他购买 x 张磁盘，y 盒录音磁带的效用函数为

$$U(x,y)=\ln x+\ln y.$$

设每张磁盘 8 元，每盒磁带 10 元，问他如何分配他的 200 元钱，才能达到最满意的效果？

解： 这是一个条件极值问题，即求 $U(x,y)=\ln x+\ln y$ 在约束 $8x+10y=200$ 之下的极值点，应用拉格朗日乘数法，定义拉格朗日函数：

$$L(x,y,\lambda)=\ln x+\ln y+\lambda(8x+10y-200)$$

$$\begin{cases} L_x(x,y,\lambda)=\dfrac{1}{x}+8\lambda=0 \\ L_y(x,y,\lambda)=\dfrac{1}{y}+10\lambda=0 \\ L_\lambda(x,y,\lambda)=8x+10y-200=0 \end{cases}$$

解得

$$x_0=12.5 \quad y_0=10$$

(x_0, y_0)为最大值点.

根据(x,y)的实际含义,取$x'_0=12$, $y'_0=10$,即如果买12张磁盘和10盒磁带的话,小孙最满意.

思考题: 在上例中,若小孙购买这两种物品的效用函数为

$$U(x,y)=3\ln x+\ln y$$

问他的200元钱又该如何分配?(18张磁盘、5盒磁带)

参考文献: [53],p.469~472.

164、鲑鱼问题

通过长期的观察,人们发现鲑鱼在河中逆流行进时,如果相对于河水的速度为v,那么游T小时所消耗的能量为

$$E(v,T)=cv^3T,\text{其中 } c \text{ 是一个常数.}$$

假设水流的速度为4km/h,鲑鱼逆流而上200公里,问它游多快才能使消耗的能量最少?

解: 注意变量v、T不是互相独立的,通过一个方程相联.易见,鲑鱼相对于河岸的速度要比相对于河水的速度少4km/h,故

$$v-4=\frac{200}{T} \qquad \text{(约束方程)}$$

则

$$T=\frac{200}{v-4}$$

故

$$E(v)=cv^3T=200c\frac{v^3}{v-4} \quad (4<v<\infty)$$

$$\frac{dE}{dv}=400cv^2\cdot\frac{v-6}{(v-4)^2}$$

令$\frac{dE}{dv}=0$,得$v=6$,而当$v<6$时,$\frac{dE}{dv}<0$,$v>6$时,$\frac{dE}{dv}>0$.故$v=6$时是$E(v)$的最小点,即鲑鱼以每小时6公里的速度游行时所消耗的能量最少.

参考文献： [53].p.200～201.

165、替商店预测某个月加利福尼亚酒的销售量

一商店有两种便宜的白葡萄酒，一种来源于加利福尼亚，一种来源于纽约.销售图表显示，两种酒每瓶的定价对它们的销售情况有影响，如果加利福尼亚酒每瓶 x 元，同时纽约酒每瓶 y 元，则加利福尼亚酒的销售量将为

$$Q(x,y)=300-20x^2+30y\ (\text{瓶})$$

预计从现在起 t 个月后，加利福尼亚酒的价格将为

$$x=2+0.05t\ (\text{元/瓶})$$

同时纽约酒的价格将为

$$y=2+0.1\sqrt{t}\ (\text{元/瓶})$$

问：从现在起 4 个月后的一个月里，加利福尼亚酒的销售量将增加（或减少）多少瓶？

解： 目标是求第 4 个月的加利福尼亚酒的销售量 Q 对时间 t 的变化率 $\left.\frac{dQ}{dt}\right|_{t=4}$.

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$=-40x\cdot(0.05)+30\cdot(0.05t^{-1/2})$$

当 $t=4$ 时， $x=2+0.05\times4=2.2$，

所以， $\left.\frac{dQ}{dt}\right|_{t=4}=-3.65$

这就是说，从现在起 4 个月后的一个月里，加利福尼亚酒的销售量将减少 3.65 瓶.

参考文献： [51],p.362.

166、当商店卖两种牌子的冻果汁时，如何取得最大利润

一个小乡村里的唯一商店有两种牌子的冻果汁，当地牌子的进价每听30美分，外地牌子的进价每听40美分．店主估计，如果当地牌子的每听卖 x 美分，外地牌子每听卖 y 美分，则每天可卖出 $70-5x+4y$ 听当地牌子的果汁，$80+6x-7y$ 听外地牌子的果汁．问：店主每天以什么价格卖两种牌子的果汁可取得最大收益？

解： 既然总收益为当地牌子果汁收益与外地牌子果汁收益之和，所以每天总收益为二元函数：

$$f(x,y)=(x-30)(70-5x+4y)+(y-40)(80+6x-7y)$$

于是求每天最大的总收益，就是求二元函数 $f(x,y)$ 的最大值．

求 $f(x,y)$ 的偏导数，得

$$f'_x=-10x+10y-20,\text{且 } f'_y=10x-14y+240$$

令

$$f'_x=0,\text{且 } f'_y=0$$

则有驻点：$x=53$ 且 $y=55$．

求二阶偏导数在(53,55)的值：

$$f''_{xx}=-10,f''_{yy}=-14,f''_{xy}=10$$

由多元函数求极值方法，由于

$$(f''_{xy})^2-(f''_{xx})(f''_{yy})=100-140=-40<0$$

$$f''_{xx}=-10<0$$

所以当 $x=53$(美分)且 $y=55$(美分)时，小店可取得最大收益．

参考文献： [51]，p. 380.

167、欧拉的四面体问题

历史上欧拉(Euler)提出了这样一个问题：如何用四面体的六

条棱长去表示它的体积?

这个问题可以用矢量代数的基本知识来解决,下面是解答过程.

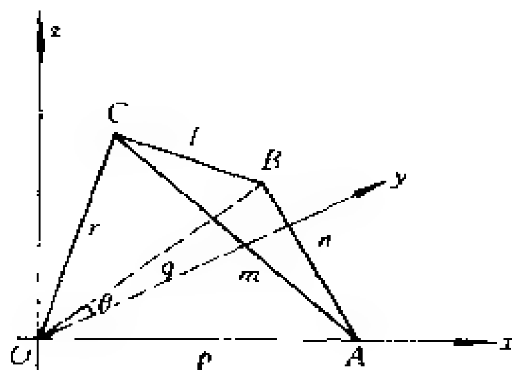


图 167 六条棱长已知的四面体

建立如图 167 所示坐标系,设 A、B、C 三点的坐标分别为 (a_1,b_1,c_1)、(a_2,b_2,c_2)和(a_3,b_3,c_3),并设四面体 $O-ABC$ 的六条棱长分别为 l、m、n、p、q、r. 由立体几何知道,该四面体的体积 V 等于以矢量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$和$\overrightarrow{OC}$为棱的平行六面体的体积(记作 V_6)的 $\frac{1}{6}$,而由空间解析几何可知,当$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$组成右手系时,以它们为棱的平行六面体的体积

$$V_6=(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

于是得

$$6V=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

将上式平方,得

$$36V^2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

由于行列式转置后其值不变,将第二个行列式进行转置后再相乘,得

$$36V^2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2+c_1^2 & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 & a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 \\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 & a_2^2+b_2^2+c_2^2 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 \\ a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 & a_3^2+b_3^2+c_3^2 \end{vmatrix}$$

根据矢量的数量积的坐标表示,有

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=a_1^2+b_1^2+c_1^2 \qquad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 \qquad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}=a_2^2+b_2^2+c_2^2$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 \qquad \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}=a_3^2+b_3^2+c_3^2$$

于是

$$36V^2=\begin{vmatrix} \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} & \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} & \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC} \end{vmatrix} \tag{1}$$

由矢量的数量积定义,又有

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|^2\cos 0=p^2$$

同理

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}=q^2,\ \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}=r^2$$

再由余弦定理,可得

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=p\cdot q\cdot\cos\theta=\frac{p^2+q^2-n^2}{2}$$

同理
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{p^2+r^2-m^2}{2},\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{q^2+r^2-l^2}{2}$$

将以上各式代入(1),得

$$36V^2=\begin{vmatrix} p^2 & \frac{p^2+q^2-n^2}{2} & \frac{p^2+r^2-m^2}{2} \\ \frac{p^2+q^2-n^2}{2} & q^2 & \frac{q^2+r^2-l^2}{2} \\ \frac{p^2+r^2-m^2}{2} & \frac{q^2+r^2-l^2}{2} & r^2 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

这就是欧拉的四面体求积公式.

例 1 一块形状为四面体的花岗岩巨石,量得六条棱长分别为

$$l=10\text{ 米}, m=15\text{ 米}, n=12\text{ 米}$$
$$p=14\text{ 米}, q=13\text{ 米}, r=11\text{ 米}$$

则 $\frac{p^2+q^2-n^2}{2}=110.5, \frac{p^2+r^2-m^2}{2}=46, \frac{q^2+r^2-l^2}{2}=95$

代入(2),得

$$36V^2=\begin{vmatrix} 196 & 110.5 & 46 \\ 110.5 & 169 & 95 \\ 46 & 95 & 121 \end{vmatrix}=1369829.75$$

于是 $V^2\approx 38050.82639, V\approx 195(\text{米}^3)$

即花岗岩巨石的体积约为 195 米^3.

古埃及的金字塔形状为四面体,因而可通过测量其六条棱长去计算金字塔的体积.

参考文献: [10]p.272~276;[20],p.312~316.

168、飞机的速度

假设空气以每小时 32 公里的速度沿平行 y 轴正向的方向流动.一架飞机在 XOY 平面沿与 x 轴正向成 $\frac{\pi}{6}$ 的方向飞行.若飞机相对于空气的速度是每小时 840 公里,问飞机相对于地面的速度

是多少？

解： 如图 168 所示，设$\overrightarrow{OA}$为飞机相对于空气的速度，$\overrightarrow{AB}$为空气的流动速度，那末$\overrightarrow{OB}$就是飞机相对于地面的速度.

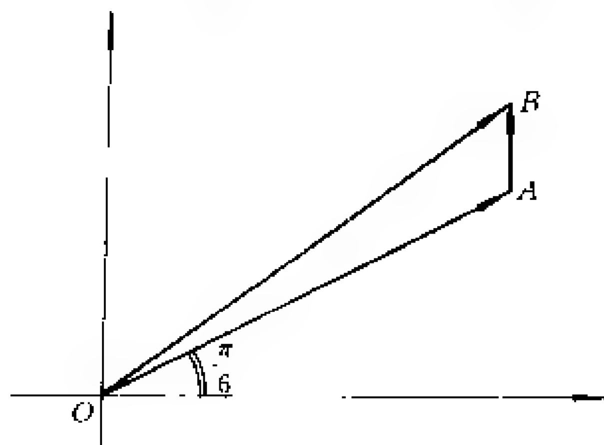


图 168 空气流动与飞机飞行速度的关系

$$\overrightarrow{OA}=840\cdot\cos\frac{\pi}{6}\boldsymbol{i}+840\cdot\sin\frac{\pi}{6}\boldsymbol{j}=420\sqrt{3}\boldsymbol{i}+420\boldsymbol{j}$$

$$\overrightarrow{AB}=32\boldsymbol{j}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OB}=420\sqrt{3}\boldsymbol{i}+452\boldsymbol{j}$$

$$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{(420\sqrt{3})^2+(452)^2}\approx856.45\text{km/h}$$

思考题： 当船以每小时 12.8 公里的速度向正北方向航行时，船上的风向标指向正东南方；当船停泊时，风向标指向正东方向，求风速（12.8km/h 正东）.

169、光线的反射

1. 假设 XOY 平面是一面镜子，有一束光线被它反射，设 $\boldsymbol{a}$ 是入射光线上的单位向量，$\boldsymbol{b}$ 是反射光线上的单位向量. 证明当 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ 时，$\boldsymbol{b}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}-a_3\boldsymbol{k}$.

2. 假设空间直角坐标系的第一卦限的三个坐标面是三面镜子. 一束光线依次被它们反射,则最终的反射光线平行入射光线.

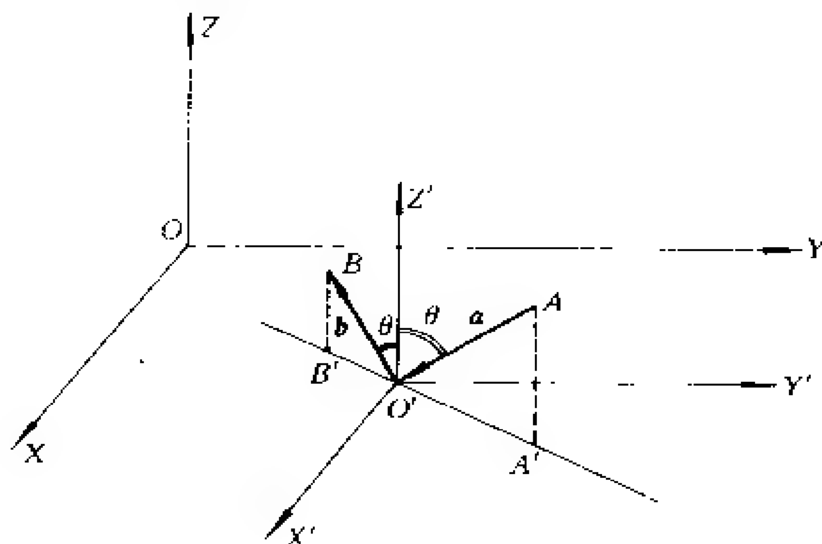


图 169 光线反射图

解: 1. 我们把原坐标系平移,使坐标原点与入射点 O' 重合. $\overrightarrow{AO'}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{O'B}=\boldsymbol{b}$. 根据光线的反射原理,入射角(入射光线与法方向的夹角)等于反射角,即图 169 中所示的 $\angle AO'Z'=\angle Z'O'B$. 因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都是单位向量,所以 $\overrightarrow{A'O'}=\overrightarrow{O'B'}$ 记 $\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$,就有 $a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}=\overrightarrow{A'O'}=\overrightarrow{O'B'}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}$

$\therefore\quad a_1=b_1, a_2=b_2$, 而

$$a_3=-|\boldsymbol{a}|\cos\theta=-\cos\theta$$

$$b_3=|\boldsymbol{b}|\cos\theta=\cos\theta$$

$\therefore\quad b_3=-a_3$, 证明了 1 的结论.

2. 假设反射依次是光线先射到 XOY 平面,经反射后进入 XOZ 平面,再反射进入 YOZ 平面,最后再反射出来.

记 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ 是最初入射光线上的单位向量. 根据 1 的结论, $\boldsymbol{a}$ 的反射光线上的单位向量 $\boldsymbol{b}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}-a_3\boldsymbol{k}$; 它又是 XOZ 平面入射光线上的单位向量,记 $\boldsymbol{c}$ 是 $\boldsymbol{b}$ 的反射光线上的单

位向量，则 $\boldsymbol{c}=a_1\boldsymbol{i}-a_2\boldsymbol{j}-a_3\boldsymbol{k}$；它又是 YOZ 平面的入射光线上的单位向量，设 $\boldsymbol{d}$ 是 $\boldsymbol{c}$ 的反射光线上的单位向量，$\therefore \boldsymbol{d}=-a_1\boldsymbol{i}-a_2\boldsymbol{j}-a_3\boldsymbol{k}$. 因而 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 平行但方向相反.

这一结论与入射与反射的平面次序无关.

参考文献： [25]，下册，p.24.

170、Kepler 定律与卫星的最大、最小速度

Kepler 第一定律：行星的运动轨迹是圆锥曲线，其方程式为 $r=\frac{1}{h}/(1+e\cos\theta)$ 其中 e 为离心率.

当 $0<e<1$ 时，该圆锥曲线为椭圆；$e=1$ 时为抛物线；$e>1$ 时为双曲线. 太阳位于该圆锥曲线的一个焦点. 并且 $\frac{1}{h}=\frac{r_0^2v_0^2}{GM}$，$e=\frac{1}{r_0h}-1=\frac{r_0v_0^2}{GM}-1$. r_0 为近日点的距离，v_0 为近日点的速度，G 为万有引力系数，等于 6.673×10^{-8} 公分^3/克·秒^2，M 为太阳的质量，大致是 1.989×10^{33} 克.

Kepler 第二定律：从太阳到某一行星的位置矢量在相同的时间内扫过的面积 $A(t)$ 相等.

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{p}{2},\ p=\frac{2\pi ab}{T}\text{ 及 }p\boldsymbol{k}=\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

其中 T 为行星运转的周期，a，b 分别是椭圆轨道的长半轴与短半轴.

Kelper 第三定律：若行星运行轨道是椭圆，则此行星运行周期 T 满足

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{GM},$$

a 为椭圆的长半轴，根据 Kepler 定律，当我们知道了一些必要的

数据后就可以计算卫星的最大,最小速度.因为由矢量分析的运算法则,设 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$,其中 $x(t),y(t),z(t)$ 对 t 可导,则有

1. $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$

2. 设 $\boldsymbol{a}(t),\boldsymbol{b}(t)$都是对 t 可导的矢量值函数,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}$$

行星在绕太阳运行的过程中服从牛顿第二定律

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}=m\cdot\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1}$$

及万有引力定律

$$\boldsymbol{F}=\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{2}$$

式中 G 为万有引力系数,M 为太阳的质量,m 为行星质量.由(1)及(2)易知

$$\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{r}\times\frac{\boldsymbol{F}}{m}=\boldsymbol{0}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{0}$$

因而 $\boldsymbol{r}\times\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$是一个常值矢量,它的方向垂直 XOY 平面(椭圆轨道所在平面),与 OZ 轴平行记之为

$\boldsymbol{r}\times\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=p\boldsymbol{k}$ p 是常数,就是 Kepler 第二定律中的 p. $\because \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}$,而 $p\boldsymbol{k}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ 知行星运动的速度$\boldsymbol{v}$ 的数值大小与它与太阳间的距离有关;已知近日点的速度$\boldsymbol{v}_0$的值$|\boldsymbol{v}_0|$最大,而远日点的速度$\boldsymbol{v}$ 的值$|\boldsymbol{v}_1|$最小.并且因为在近日点与远日点处 $\boldsymbol{r}$ 与$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$垂直,所以 $p=r_0v_0=r_1v_1$(r_0,r_1 分别为近日点与远日点的距离).

问题 1： 已知地球绕太阳公转一周要用 365.256 天，离心率 $e=0.016732$，$a=14959787\times10^6$ 公分，试求地球的 p 值，r_0 与 v_0.

解： 根据椭圆中的一些参数之间的关系：

$e=\dfrac{c}{a}$，其中 $2c$ 代表椭圆的焦距. 由 $c=\sqrt{a^2-b^2}$

可计算

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{a^2-a^2e^2}=a\sqrt{1-e^2}$$
$$=149576927.8\times10^5(\text{cm})$$

$$T=365.256(\text{天})=3.156\times10^7(\text{s})$$

$$\therefore\quad p=\frac{2\pi a\cdot b}{T}=4.454848\times10^{19}(\text{cm}^2/\text{s})$$

$$r_0=a-c=a(1-e)=147094798.7\times10^5\quad(\text{cm})$$

$$v_0=\frac{p}{r_0}=30.2855761\times10^5\quad(\text{cm/s})$$
$$\doteq30.286\quad(\text{km/s})$$

问题 2： 我国第一颗地球卫星东方红沿椭圆形轨道绕地球运行. 它离地球表面的最远点为 2384km，最近点为 439km，周期是 114min，地球半径为 6378km，求这颗卫星的最大速度与最小速度.

解： $p=\dfrac{2\pi a\cdot b}{T}=r_0v_0=r_1v_1$

要计算 v_0,v_1 的值，首先要计算出 a,b,r_0 与 r_1 的值.

根据 $\quad r_1(\text{远地点})=6378+2384=8762\quad(\text{km})$

$$r_0(\text{近地点})=6378+439=6817\quad(\text{km})$$

$$\because\quad 2a=r_0+r_1\qquad\therefore\quad a=7789.5\quad(\text{km})$$

又 $r_0=a-c\qquad\therefore\quad c=972.5\quad(\text{km})$

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=7728.55\quad(\text{km})$$

$$v_0=\frac{2\pi a\cdot b}{Tr_0}=8.112\quad(\text{km/s})$$

$$v_1 = \frac{2\pi ab}{Tr_1} = 6.311 \quad (\text{km/s})$$

参考文献： [3]，下册，p.68～76；[25]，下册 p.151～153；[27]，p.1190～1191．

171、超音速飞机与“马赫锥”

当一架超音速飞机在高空飞行时，由于飞机的速度比音速快，所以人们常常是先看到飞机在天空中掠过，片刻之后才能听到震耳的隆隆声．那么请问，在同一时刻，天空中的什么区域内可以听得到飞机的声音呢？这个问题的答案十分有趣：能够听到飞机声的区域恰好是一个以飞机为顶点的圆锥体——这就是著名的“马赫锥”．在马赫锥之外，无论距离飞机多么近，也不会听到飞机的轰鸣声．

设声音在空气中的传播速度是 v_0，并假定飞机正在沿水平方向作匀速直线飞行，飞行速度是 $v(v>v_0)$．请推导出马赫锥所满足的锥面方程．

解： 解答这个问题之前，我们首先了解一下声音传播的特性．设在空中有一个点声源，它在 $t=0$ 时发出的声波以音速 v_0 向四面八方传播，经过时间 s 之后所能达到的最大传播范围是一个以声源为心的球面，球面半径恰好是声波在 s 时间内所传播的距离 v_0s．因此，人们把声波称为球面波，把以 v_0s 为半径的球面称为 s 时刻的“波前”．通过以上分析易知，波前是声音所达的最远范围，在波前之外就听不到声源所发生的声音了．

现在回到我们的问题．以 $t=0$ 时飞机的位置作为坐标原点，以飞机前进的方向作为 x 轴建立三维直角坐标系．如图 171 所示．为便于观察，图中未标出 z 轴．z 轴垂直于纸面向外．设 $t=a$ 时飞机的位置在 $A(va,0,0)$处，考虑此时能听到飞机声的范围．

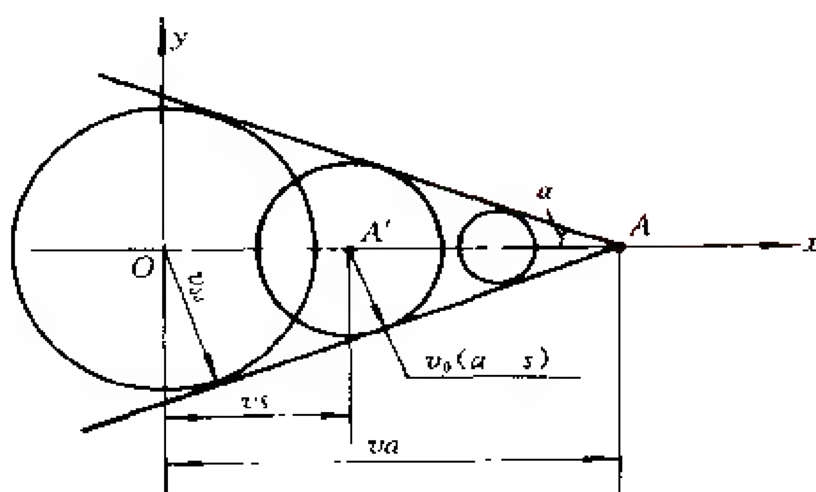


图 171　马赫锥

在时间段[0,a]内的任意时刻 s，飞机作为一个点声源都在发出球面波，这个球面波到 a 时刻的波前半径为 $v_0(a-s)$，球心位置即为 s 时刻时飞机的位置 vs，故波前方程为

$$(x-vs)^2+y^2+z^2=v_0^2(a-s)^2, 0\leqslant s\leqslant a \tag{1}$$

当 s 从 0 变到 a 时，这是一个含有参数 s 的球面族．由于在 $t=a$ 时声音不会超出任何一个球面，所以这个球面族所充斥的区域就是能听到飞机声的区域，而在球面族之外则听不到飞机的声音了．

为了消去球面族的参数 s，(1)两端对 s 求偏导，得

$$v(x-vs)=v_0^2(a-s) \tag{2}$$

由此解出

$$s=\frac{vx-v_0^2a}{v^2-v_0^2}$$

$$x-vs=\frac{v_0^2(va-x)}{v^2-v_0^2}$$

$$a-s=\frac{v(va-x)}{v^2-v_0^2}$$

将上述结果代入(1)，得

$$y^2+z^2=\frac{v_0^2}{v^2-v_0^2}(x-va)^2 \tag{3}$$

这是一个以 $A(va,0,0)$ 为顶点，x 轴为对称轴的圆锥面，也就是我们所求的马赫锥方程.

思考题： (1)将 A 作为坐标原点时，马赫锥的锥面方程有什么形式？（答案：$y^2+z^2=\frac{v_0^2}{v^2-v_0^2}x^2$）

(2) 求马赫锥的半顶角 α（答案：α 由下式决定：$\sin\alpha=\frac{v_0}{v}=\frac{1}{M}$ 或 $\alpha=\arcsin\frac{v_0}{v}=\arcsin\frac{1}{M}$ 其中 $M=\frac{v}{v_0}$，即飞机速度与音速之比，常被称为马赫数）.

(3) 当飞机以马赫数 2 飞行时，计算马赫锥的锥面方程（答案：$y^2+z^2=\frac{1}{3}x^2$）.

参考文献： [69], p.500.

172、刚体转动时速度的分布

考虑环绕着一个不动轴 (L) 转动的刚体. 在这样转动下，刚体的任何点就有速度 $\boldsymbol{v}$，它的大小等于点 M 到转动轴的距离 PM 乘以转动角速度 ω，方向垂直于通过转动轴以及点 M 的平面（图172）. 这个速度 $\boldsymbol{v}$ 可以由下述几何方法来表示. 由轴 (L) 的两个方向中取定一个，使得逆时针方向转动时算作是正的. 由轴上任意一点 A 在所述方向上截取一个线段，它的长度等于 ω，我们就有一个矢量 $\boldsymbol{O}$，它叫做角速度矢量. 再用 $\boldsymbol{r}$ 记由线段 $\overrightarrow{AM}$ 确定的矢量，于是借助于矢量积的定义，不难得到下面对于速度 $\boldsymbol{v}$ 的表达式：

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{O}\times\boldsymbol{r}.$$

因为矢量积 $\boldsymbol{O}\times\boldsymbol{r}$ 的大小等于

$$|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{O}|\sin(\boldsymbol{r},\boldsymbol{O})=\omega\cdot|\overrightarrow{MA}|\cdot\sin\varphi$$
$$=\omega\cdot|\overrightarrow{MP}|=|\boldsymbol{v}|,$$

而方向与 $\boldsymbol{v}$ 的方向相同.

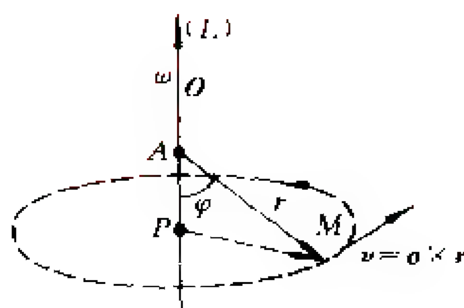


图 172 绕不动轴转动的刚体

由动力学知道,刚体的任何运动中具有一个不动点 O 时,在每一个给定的时刻刚体上点的速度,就好像是这刚体绕着某一根通过点 O 的轴(瞬时轴)在转动,而有某一个角速度 ω(瞬时角速度),一般说来,转动轴的位置以及 ω 的大小是随时间改变的.依照以上所述,在每一个给定的时刻,刚体上点速度由一个矢量积来确定,它就是瞬时角速度矢量与矢量 $\overrightarrow{OM}$ 的矢量积.

参考文献: [43],p.300.

173、基因的"距离"

在 ABO 血型的人们中,对各种群体的基因的频率进行了研究.如果我们把四种等位基因 A_1、A_2、B、O 区别开,有人报告了如下的相对频率,见下表:

	爱斯基摩人 f_{1i}	班图人 f_{2i}	英国人 f_{3i}	朝鲜人 f_{4i}
A_1	0.2914	0.1034	0.2090	0.2208
A_2	0.0000	0.0866	0.0696	0.0000
B	0.0316	0.1200	0.0612	0.2069
O	0.6770	0.6900	0.6602	0.5723
总计	1.000	1.000	1.000	1.000

现在的问题是：一个群体与另一群体的接近程度如何？换句话说，就是要找到一个表示基因的“距离”的合宜的量度.

解： 有人提出一种利用矢量代数的方法.首先，我们用单位矢量，即绝对值为1的矢量，来表示每一个群体.为此目的，我们取每一种频率的平方根，记 $x_{kr}=\sqrt{f_{kr}}$.由于对这四种群体的每一种有 $\sum_{r=1}^{4} f_{kr}=1$，所以我们得到 $\sum_{r=1}^{4} x_{kr}^2=1$.这意味着下列四个矢量

（爱斯基摩人） （班图人） （英国人） （朝鲜人）

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{12}\\x_{13}\\x_{14}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}x_{21}\\x_{22}\\x_{23}\\x_{24}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}x_{31}\\x_{32}\\x_{33}\\x_{34}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}x_{41}\\x_{42}\\x_{43}\\x_{44}\end{pmatrix}$$

的每一个都是单位矢量，即 $|\boldsymbol{\alpha}_k|=1$

在四维空间中，这些矢量的顶端都位于一个半径为1的球面上.

现在用两个矢量间的夹角来表示两个对应的群体间的“距离”似乎是合理的.如果我们把 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 之间的夹角记为 θ，那么由于 $|\boldsymbol{\alpha}_1|=|\boldsymbol{\alpha}_2|=1$，再由内积公式，得：

$$\cos\theta=\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2$$

详细的数值是 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0.5398\\0.0000\\0.1778\\0.8228\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0.3216\\0.2943\\0.3464\\0.8307\end{pmatrix}$

$\therefore\quad \cos\theta=\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2=(0.5398)(0.3216)+\cdots=0.9187$

$\therefore\quad \theta=23.2°$

按同样的方式，我们可以得到下表：

	爱斯基摩人	班图人	英国人	朝鲜人
爱斯基摩人	0°	23.2°	16.4°	16.8°
班图人	23.2°	0°	9.8°	20.4°
英国人	16.4°	9.8°	0°	19.6°
朝鲜人	16.8°	20.4°	19.6°	0°

最小的基因“距离”是班图人和英国人之间的“距离”，而爱斯基摩人和班图人之间的基因“距离”最大.

参考文献： [41],p.348～350.

174、通电线圈的磁转矩问题

设一矩形通电线圈 $ORPQ$(平面)置于均匀磁场中，$\boldsymbol{n}_0$ 是垂直于线圈平面的单位矢量，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{n}_0$ 的夹角为 θ(如图174)，求电流回路所受到的磁转矩.

解： 如图 174，将回路的 OR 边取为 z 轴，，以 $\boldsymbol{B}$ 的指向为 y

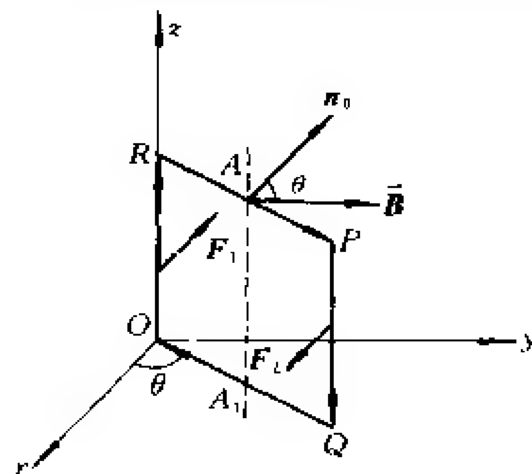


图 174 磁转矩

轴的正向，这样，便可以用角 θ 来表示通电线圈在磁场中的位置.

把通电线圈放置在磁场中，磁场对线圈的四个边(直线电路)分别都产生作用力．而磁场对线圈 $ORPQ$ 的作用就是对这四个边作用的总效应．分为以下情况考虑：其一，对边 OQ 和 RP，由物理知识知道，该两边所受到的力大小相等，方向相反且作用于同一直线 AA_1 上，结果作用力抵消，既不引起线圈的平动，也不引起线圈的转动．其二，对 OR，PQ 这两边，所受到的力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 同样也是大小相等，方向相反($\boldsymbol{F}_1$ 沿 $\overrightarrow{OR}\times\boldsymbol{B}$ 方向，$\boldsymbol{F}_2$ 沿 $\overrightarrow{PQ}\times\boldsymbol{B}$ 方向)，所以不引起线圈质心的平动．但这两个力并不是作用在一条直线上，所以，这对力偶形成转矩，它的作用使线圈绕轴 AA_1 转动．

设边 OR 的长为 a，线圈中电流强度为 I，则力 $\boldsymbol{F}_1$ 的大小为

$$|\boldsymbol{F}_1| = Ia|\boldsymbol{B}|$$

又设边 OQ 的长度为 b，则 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 之间的垂直距离为 $b\sin\theta$，因而，所求磁转矩的大小为

$$|\boldsymbol{M}| = Iab|\boldsymbol{B}|\sin\theta$$

$\boldsymbol{M}$ 的方向按右手规则，为从 $A\to A_1$ 的方向，也即指向 z 轴的负向．记线圈平面的面积为 s，引入矢量 $\boldsymbol{s} = s\boldsymbol{n}_0$，则 $\boldsymbol{M}$ 可以表为矢量的叉积形式，即

$$\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{B}$$

175、火山喷发后高度的变化

一火山的形状可以用曲面 $z = he^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{4h}}$ $(z>0)$ 来表示．在一次喷发后，有体积为 V 的熔岩粘附在山上，使它具有和原来一样的形状．求火山高度变化的百分比．

解： 以 V_0 记火山喷发前的体积，V_1 为喷发后的体积，h_1 为喷发后火山的高度．于是 $V = V_1 - V_0$，要求的是 $\dfrac{h_1 - h}{h}$．

先计算火山喷发前的火山体积 $V_0=\iint_D h\cdot e^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{4h}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

由于火山的底很大，把它看成无限大，用极坐标来计算，有

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty} h\cdot e^{-\frac{r}{4h}} r\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi h\cdot(-4h)\left[r\cdot e^{-\frac{r}{4h}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{r}{4h}}\mathrm{d}r\right] \\
&= 8\pi h^2\cdot(-4h)e^{-\frac{r}{4h}}\Big|_0^{+\infty}=32\pi h^3
\end{aligned}
$$

于是 $V_1=32\pi h_1^3$，$V=32\pi(h_1^3-h^3)$

$$
h_1=\left(h^3+\frac{V}{32\pi}\right)^{\frac{1}{3}},\qquad \frac{h_1-h}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{V}{32\pi}+h^3\right)^{\frac{1}{3}}-1
$$

参考文献： [3]，p.237.

176、飓风的能量有多大

在一个简化的飓风模型中，假定速度只取单纯的圆周方向，其大小为 $v(r,z)=\Omega r e^{\frac{z}{h}-\frac{r}{a}}$，其中 r,z 是柱坐标的两个坐标变量，Ω,h,a 为常量. 以海平面飓风中心处作为坐标原点，如果大气密度 $\rho(z)=\rho_0 e^{-\frac{z}{h}}$ *，求运动的全部动能. 并问在哪一位置速度具有最大值?

解： 求动能 E. $\because E=\frac{1}{2}mv^2$，微元素

$$
\mathrm{d}E=\frac{1}{2}v^2\cdot\Delta m=\frac{1}{2}v^2\cdot\rho\cdot\mathrm{d}V
$$

---

* Ω 为角速度，a 为风眼半径，一般为 15—25km，大的可达 30—50km，h 为等温大气高度，ρ_0 为地面大气密度. 在飓风中，由于气压很大，ρ_0 的变化也很大，这里是理想化模型，认为它们是常数，与飓风的级别无关.

故
$$E=\frac{1}{2}\iiint_{(V)}\rho_0 e^{-\frac{z}{h}}\cdot(\Omega r e^{-\frac{z}{h}-\frac{r}{a}})^2 dV$$

因为飓风活动空间很大，在选用柱坐标计算中 z 由 $0\to+\infty$，r 由 $0\to+\infty$.

$$\therefore\qquad E=\frac{1}{2}\rho_0\Omega^2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}r^2e^{-\frac{2r}{a}}r dr\int_0^{+\infty}e^{-\frac{3z}{h}}dz$$

其中 $\int_0^{+\infty}r^3e^{-\frac{2r}{a}}dr$ 用分部积分法算得为 $\frac{3}{8}a^4$，

$$\int_0^{+\infty}e^{-\frac{3z}{h}}dz=-\frac{h}{3}\cdot e^{-\frac{3z}{h}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{h}{3},$$

最后有

$$E=\frac{1}{2}\rho_0\Omega^2\cdot 2\pi\cdot\frac{3}{8}a^4\cdot\frac{h}{3}$$
$$=\frac{h\rho_0\pi}{8}\Omega^2a^4$$

下面计算何处速度最大.

$$v(r,z)=\Omega r e^{-\frac{z}{h}-\frac{r}{a}}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial z}=\Omega r\left(-\dfrac{1}{h}\right)e^{-\frac{z}{h}-\frac{r}{a}}=0 & (1)\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial r}=\Omega\left(e^{-\frac{z}{h}-\frac{r}{a}}+r\cdot\left(-\dfrac{1}{a}\right)\cdot e^{-\frac{z}{h}-\frac{r}{a}}\right)=0 & (2)\end{cases}$$

由(1)式得 $r=0$，显然，当 $r=0$ 时 $v=\Omega r e^{-\frac{z}{h}-\frac{r}{a}}=0$，不是最大值(实际上是最小值)，舍去. 由(2)式解得 $r=a$. 此时 $v(a,z)=\Omega a\cdot e^{-1}\cdot e^{-\frac{z}{h}}$，它是 z 的单调下降函数. 故 $r=a$，$z=0$ 处速度最大. 也即海平面上风眼边缘边速度最大.

参考文献： [3]，下册，p.266.

177、怎样计算水桶的最大容水量

某仪器上有一只圆柱形的无盖水桶，桶高 6cm，半径为 1cm.

在桶壁上钻有两个小孔用于安装支架，使水桶可以自由倾斜．两个小孔距桶底 2cm，且两孔连线恰为直径，水可以从两个小孔向外流出．当水桶以不同角度倾斜放置且没有水漏出时，这只水桶最多可装多少水？

解： 如图 117 建立直角坐标系．设 $M(0,1,t)$ 为圆柱母线 CD 上任意一点，两孔位置分别为 $A(1,0,2)$，$B(-1,0,2)$．

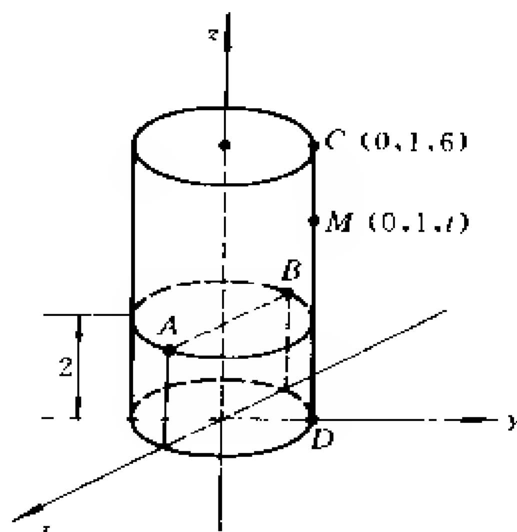


图 177　水桶示意图

设当水桶倾斜时，水平面恰好通过 A,B,M 三点，此平面的方程为

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & t-2 \end{vmatrix}=0$$

整理可得：$z=(t-2)y+2$，由 $z\geqslant 0$ 知 $y\geqslant\frac{-2}{t-2}$．

水桶容量为圆柱位于水平面下方的体积．故

$$V(t)=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ y\geqslant -\frac{2}{t-2}}}[(t-2)y+2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\frac{2}{t-2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}[(t-2)y+2]\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{-\frac{2}{t-2}}^{1}[(t-2)y+2]\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=2t\int_{-\frac{2}{t-2}}^{1}y\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y+4\int_{-\frac{2}{t-2}}^{1}(1-y)\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y$$

于是，

$$\frac{dV}{dt}=2\int_{-\frac{2}{t-2}}^{1} y\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$-2t\left(\frac{-2}{t-2}\right)\sqrt{1-\frac{4}{(t-2)^2}}\cdot\frac{2}{(t-2)^2}$$

$$-4\left(1+\frac{2}{t-2}\right)\sqrt{1-\frac{4}{(t-2)^2}}\cdot\frac{2}{(t-2)^2}$$

$$=2\int_{-\frac{2}{t-2}}^{1} y\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$=-\frac{2}{3}(1-y^2)^{3/2}\Big|_{-\frac{2}{t-2}}^{1}$$

$$=\frac{2}{3}\left[1-\frac{4}{(t-2)^2}\right]^{3/2}$$

$$=\frac{2}{3}\frac{[t(t-4)]^{3/2}}{(t-2)^3}\quad(2\leqslant t\leqslant 6)$$

由于 $2<t<4$ 时 $\frac{dV}{dt}<0$，$4<t\leqslant 6$ 时，$\frac{dV}{dt}>0$，可知在驻点 $t=4$ 处，$V(t)$ 取得极小值，因此最大值只能在 $t=2$ 或 $t=6$ 处取得．计算可知

$$V(2)=\pi r^2 h=2\pi$$

$$V(6)=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ y\geqslant \frac{1}{2}}}(4y+2)\,dx\,dy=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{4}{3}\pi$$

所以，水桶的最大容水量 $V_{max}=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{4}{3}\pi$.

参考文献： [66].

178、如何求通过孔口的流量

设容器壁上液体表面下深为 h 的位置 P 处，有一个孔口，它

的面积为 q(图 178－1),那末根据托里斯利(Torricelli)原理,液体在 P 处的水平流速 v 就用公式 $v=\sqrt{2gh}$ 来表示,通过灌注液体的办法,可以使 h 保持不变,那末在孔口处流速为常数.于是单位时间内通过 q 流出的液体量(密度设为 1)等于 qv,其中 v 是孔口某点 P 处的平均速度.今设孔口是铅直于底且是 xOy 面上的域 (D)(图 178－2).如何求单位时间内通过孔口 D 的总流量 Q?

解: 利用元素法,取 D 上的面积元素 $d\sigma$,这时通过 $d\sigma$ 的流量 $dQ=v\,d\sigma=\sqrt{2gy}\,d\sigma$,其中 y 是 $d\sigma$ 内一个适当点的深度.于是通过孔中 D 的总流量 Q 就可用下列二重积分来确定:

$$Q=\iint_D \sqrt{2gh}\,d\sigma \tag{1}$$

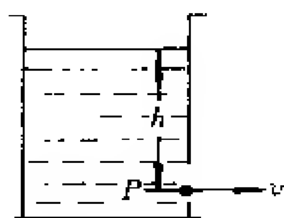


图 178－1
器壁小孔的
流量图

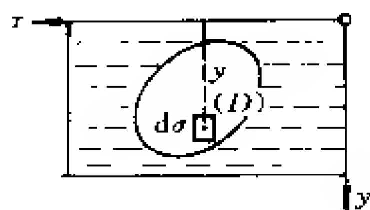


图 178－2

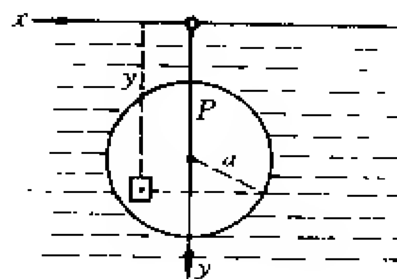


图 178－3

如果孔口是一个半径为 a 的圆(图 178－3),圆心在水表面之下的深度 p 处,这时

$$Q=\iint_D \sqrt{2gy}\,dx\,dy,\text{其中 } D \text{ 为 } x^2+(y-p)^2\leqslant a^2.$$

即

$$D:\begin{cases} p-a\leqslant y\leqslant p+a, \\ -\sqrt{a^2-(y-p)^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{a^2-(y-p)^2}. \end{cases}$$

于是由二重积分在直角坐标系下的计算公式得

$$\begin{aligned} Q &= \int_{p-a}^{p+a}\sqrt{2gy}\,dy\int_{-\sqrt{a^2-(y-p)^2}}^{\sqrt{a^2-(y-p)^2}}dx \\ &=2\int_{p-a}^{p+a}\sqrt{2gy[a^2-(y-p)^2]}\,dy \end{aligned}$$

$$=2\sqrt{2g}\int_{p-a}^{p+a}\sqrt{y(a+p-y)(a-p+y)}\mathrm{d}y$$

因为上面积分的被积函数是根号下的一个三次式，这是一个椭圆积分．作代换 $y=p+a\sin\theta$，这时 $\mathrm{d}y=a\cos\theta\mathrm{d}\theta$，$\theta$ 的积分限是从 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$，于是

$$Q=2a^2\sqrt{2gp}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\sqrt{1+\frac{a}{p}\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

上述积分可利用幂级数展开来计算．首先将被积函数展成 $\sin\theta$ 的幂级数，然后对 $\sin\theta$ 的幂级数逐项积分，就可得到下列结果：

$$Q=\pi a^2\sqrt{2gp}\left[1-\frac{1}{32}\left(\frac{a}{p}\right)^2-\frac{5}{1024}\left(\frac{a}{p}\right)^4-\cdots\right]$$

如果 $p=a$，就是说，如果孔口恰恰与 x 轴相切，这时积分就可以用初等函数来表示．从

$$Q=2\sqrt{2g}\int_0^{2a}y\sqrt{2a-y}\mathrm{d}y$$

作代换 $2a-y=t^2(t\geqslant 0)$，立刻得到

$$Q=4\sqrt{2g}\int_0^{\sqrt{2a}}(2at^2-t^4)\mathrm{d}t=\frac{64}{15}a^2\sqrt{ga}.$$

所以流量随半径 a 而增大，这比孔口面积 πa^2 的增大率还要大．

参考文献： [35]，p.94～96.

179、泊萧叶公式

在例 87 中我们获得了泊萧叶(Poiseuille)公式：单位时间内的血流量正比于血管半径的四次方．下面我们用重积分更自然地导出泊萧叶公式．

解： 假设血管有一个半径为 R(cm)的圆截面，如图 179－1 所示．让我们把注意力放在这个圆截面上，并测量一秒钟内流过此

截面的血的流量.圆截面上 P 点的位置由 r(cm)和 θ 决定,我们可以写成 $P=(r,\theta),0\leqslant r\leqslant R,0\leqslant\theta\leqslant2\pi$.

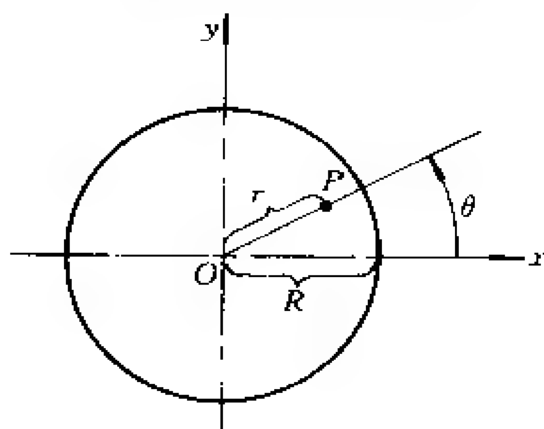


图 179－1　半径为 R 的血管的圆截面

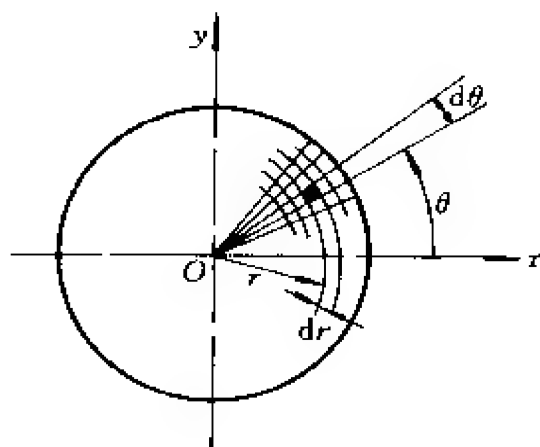


图 179－2　把圆截面分成许多小的区域

让我们用一组以极点为圆心的同心圆 $r=$ 常数,和一组从极点出发的射线 $\theta=$ 常数,将血管的圆截面分成很多小的区域,如图 179－2 所示.每一个小区域可被近似地看成长为 $\mathrm{d}r$、宽为 $r\mathrm{d}\theta$ 的矩形,每个小区域的面积 $\mathrm{d}A=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.根据牛顿片流公式(参阅例 130),血液的流速 $V=\dfrac{P_1-P_2}{4\eta L}(R^2-r^2)$.因此,一秒钟内通过面

积为 dA 的小区域的血的流量为

$$VdA = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)rdrd\theta$$

在这里我们把通过面积为 dA 的小区域的血的流速 V 看成是一个常数. 那么在一秒钟内流过圆截面的血的总流量 Q 就是所有这些小的流量 VdA 之和.

$$Q = \iint_{\text{圆截面}} VdA = \iint_{\substack{0 \leqslant r \leqslant R \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi}} \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)rdrd\theta$$

$$= \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}\int_0^{2\pi}\int_0^R (R^2 r - r^3)drd\theta$$

$$= \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}R^2 r^2 - \frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^R d\theta$$

$$= \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}R^4 d\theta = \frac{\pi(P_1 - P_2)}{8\eta L}R^4$$

这就是泊萧叶公式.

需要指出的是,泊萧叶公式在血液循环力学中的应用是一种理想化的近似. 泊萧叶公式一般应用于小血管,而且通常是用于定性的描述.

参考文献: [46],p. 794.

180、刚体的转动惯量和刚体的绕轴运动

一个刚体,(1)若以等角速度 ω 绕一个固定轴旋转,求刚体的动能;(2)若在重力作用下绕一水平轴自由摆动,试讨论刚体的运动.

解: (1)在最简单情况下,质量为 m,速率为 v 的一个质点,它具有的动能是

$$E=\frac{1}{2}mv^2$$

更复杂的计算都建立在这个公式的基础上.于是,刚体上质量元素 dm 提供的动能为$\frac{1}{2}dmv^2$.如果 dm 到旋转轴距离是 r,那么 $v=\omega r$,从而,动能元素为

$$dE=\frac{1}{2}\omega^2r^2dm$$

将动能元素在整个物体上积分,就得到全部动能

$$E=\iiint dE=\iiint\frac{1}{2}\omega^2r^2dm$$

因为 ω 是常数.所求刚体的动能可以写成

$$E=\frac{1}{2}I\omega^2$$

其中 $I=\iiint r^2dm$ 称为物体对给定轴的转动惯量(惯性矩).

由此可见转动惯量的物理意义.在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,旋转轴与三个坐标轴之一重合时,对 x 轴、y 轴和 z 轴的转动惯量分别为

$$I_x=\iiint(y^2+z^2)dm,I_y=\iiint(z^2+x^2)dm$$

$$I_z=\iiint(x^2+y^2)dm$$

(2) 设 M 是刚体质量,l 是固定轴 O 到质心 G 的距离,I 是关于过 O 点的水平轴的转动惯量,g 是重力加速度,θ 是 OG 与铅垂方向之间的夹角,如图.

刚体在自由摆动中不存在任何能量损耗,也就是说没有任何类型的阻力,在运动期间物体的总能量即动能与势能之和必须保持不变.

动能是绕水平轴旋转的能量,由 $E=\frac{1}{2}I\omega^2$,将其中 ω 换为瞬

时角速度$\frac{d\theta}{dt}$,得到动能$\frac{1}{2}I(\frac{d\theta}{dt})^2$.势能是物体的重量与质心的垂直位移的乘积,也就是$-Mgl\cos\theta$,因此,总能量

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-Mgl\cos\theta=C\quad(C\text{ 为常数})$$

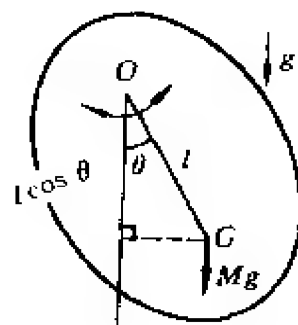


图 180　刚体自由摆动

此外,如果最大的偏转角是$\theta=\alpha$,此处$\frac{d\theta}{dt}=0$,得到$C=-Mgl\cos\alpha$.上式成为

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{2Mgl}{I}(\cos\theta-\cos\alpha)$$

这是确定θ作为t的函数的一个微分方程.

求解这个微分方程不是非常简单的,因为它导致一个椭圆积分.不过,对于平衡点附近的微小振动,当OG保持接近于铅垂位置时,这个解却是容易求出的,对于这种特殊情形,可以这样求解:在上面的微分方程中,两边对t求导数,得到

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{Mgl}{I}\sin\theta=0$$

这个结果对于一般情形都成立.当θ很小时,$\sin\theta\approx\theta$,方程可以用下式近似:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{Mgl}{I}\theta=0$$

这是一个二阶常系数齐次线性微分方程.它的特征方程为$r^2+\frac{Mgl}{I}=0$,其根$r=\pm i\left(\frac{Mgl}{I}\right)^{\frac{1}{2}}$是一对共轭复根,微分方程的通解为

$$\theta=C_1\cos\left(\frac{Mgl}{I}\right)^{\frac{1}{2}}t+C_2\sin\left(\frac{Mgl}{I}\right)^{\frac{1}{2}}t$$

令　$C_1=A\sin\varphi,C_2=A\cos\varphi(0\leqslant\varphi<2\pi)$,上式成为

$$\theta=A\sin\left[\left(\frac{Mgl}{I}\right)^{\frac{1}{2}}t+\varphi\right]$$

其中 $A=\sqrt{C_1^2+C_1^2}$，$\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{C_1}{C_2}$.

由这个微分方程的解可知，当振幅很小时，刚体的自由摆动是一个简谐振动，周期是 $2\pi\left(\dfrac{I}{Mgl}\right)^{\frac{1}{2}}$.

参考文献： [3]，p.262～263.

181、用曲线积分证明 Kepler 第二定律

Kepler 在研究了他的老师和同事 Tycho Brahe 所做的天文观察结果达 20 年之久，然后提出了行星运动的三大定律.

1. 行星的运行轨道是以太阳为焦点的圆锥曲线. 行星沿椭圆形轨道绕太阳运转，太阳在椭圆轨道的一个焦点上；彗星可以按椭圆形轨道运行，这时我们可以周期地看到它，例如哈雷彗星，彗星也可以按抛物线形或双曲线形的轨道绕太阳运行，这时我们最多可以观察到它两次.

2. 从太阳到行星的向径在相等的时间内扫过相等的面积.

3. 行星运行的周期平方正比于椭圆长轴的立方.

牛顿用微积分提出了著名的万有引力定律，Kepler 定律可由万有引力定律推得. 这里我们用曲线积分的方法来证明 Kepler 第二定律. 其中要用到矢量分析中的几个结论：

1. 设 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$，$x(t)$、$y(t)$、$z(t)$对 t 可导，则 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$.

2. 设 $\boldsymbol{a}(t)$，$\boldsymbol{b}(t)$均是对 t 可导的矢量值函数，则

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}$$

下面开始证明 Kepler 第二定律：

行星在绕太阳运动过程中服从牛顿第二定律

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}=m\cdot\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1}$$

及万有引力定律

$$\boldsymbol{F}=\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{2}$$

其中 G 为万有引力系数，M 为太阳质量，m 为行星质量. 由(1)与(2)知

$$\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{r}\times\left(\frac{1}{m}\boldsymbol{F}\right)=\boldsymbol{0}$$

而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{0} \tag{3}$$

于是 $\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$是一个常值矢量，它的方向垂直 XOY 平面，即与 OZ 轴平行. 记

$$\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=p\boldsymbol{k}\quad p\text{ 是常数} \tag{4}$$

见图 181，当行星沿椭圆轨道从 B 运动到 D，矢径$\overline{OB}$所扫过的面积 A 可以用第二类曲线积分求面积的公式

$$A(t)=\frac{1}{2}\oint_{OBDO}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)$$

求得. 下面来计算这个曲线积分.

$$A(t)=\frac{1}{2}\int_{\overline{OB}}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)+\frac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{BD}}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\overline{DO}}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)$$

其中$\overline{OB}$的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0}x$，

$$\therefore\quad\int_{\overline{OB}}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=\int_0^{x_0}\left(x\cdot\frac{y_0}{x_0}\mathrm{d}x-\frac{y_0}{x_0}x\mathrm{d}x\right)=0$$

同理可证 $\int_{\overline{DO}}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=0$.

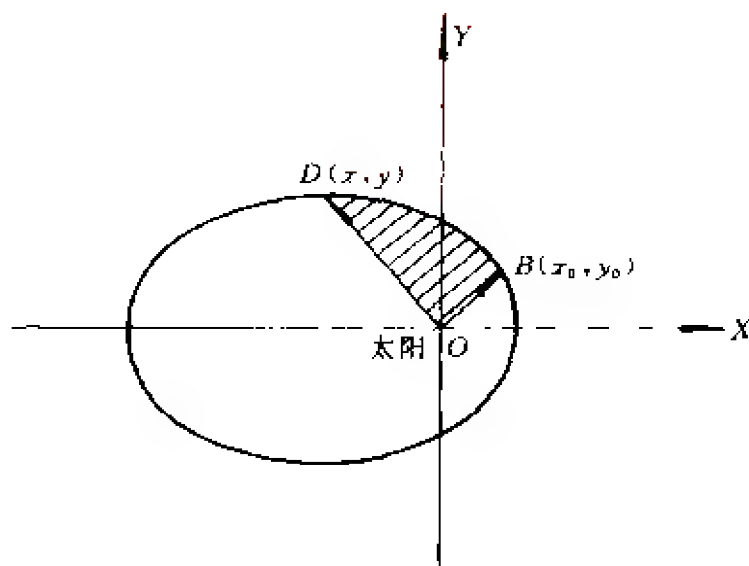


图 181　阴影部分为行星从 B 运行到 D，向径$\overrightarrow{OB}$扫过的面积

现在计算 $\int_{\overset{\frown}{BD}}(x\mathrm{d}y-x\mathrm{d}y)$.

$$\because \qquad \boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j} \tag{5}$$

由(4)及(5)

$$p\boldsymbol{k}=\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=(x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j})\times\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}\right)$$

$$=(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})\boldsymbol{k}$$

$$\therefore \quad p=x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=xy_t'-yx_t'$$

于是 $A(t)=\frac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{BD}}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(xy_t'-yx_t')\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2}p\cdot\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}p(t-t_0)$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}p,$$ 得证.

以 T 记行星绕太阳运行的周期，记椭圆的长半轴为 a，短半

轴为 b. 则椭圆面积

$$\begin{aligned}\pi ab &= A(T+t)-A(t)\\ &= \frac{1}{2}p(T+t-t_0)-\frac{1}{2}p(t-t_0)\\ &= \frac{1}{2}pT\end{aligned}$$

$$\therefore \quad T=\frac{2\pi ab}{p} \quad 或 \quad p=\frac{2\pi ab}{T}$$

参考文献: [3], 下册, p. 68～76; [25], 下册, p. 151～153; [27], p. 1190～1191.

182、摆线的等时性

一个半径为 r 的轮子沿一条水平的直线向前滚动(没有滑动). 轮子边缘一点 P 的运动轨迹是条曲线 $\begin{cases}x=a(\phi-\sin\phi)\\ y=a(1-\cos\phi)\end{cases}$. 这条曲线的名称就叫做旋轮线或摆线.

1696 年 John Bernoulli 公开提出一个问题:确定一条从 A 点到 B 点的曲线(B 点在 A 点下方但不在 A 点的正下方),使得一颗珠子在重力作用下沿着这条曲线从 A 点滑到 B 点所需时间最短. 这就是有名的最速下降线问题. 它是对变分学发展有巨大影响的三大问题之一. 这个问题在 1697 年就得到了解决, Newton, Leibniz, L'Hospital, John Bernoulli 和他的哥哥 James Bernoulli 都独立得到了正确的结论:它不是连接 A,B 的直线,而是唯一的一条连接 A,B 的上凹的摆线. 在此之后, 1764 年 Euler 证明了沿着摆线弧摆动的摆锤,不论其振幅的大小,作一次完全摆动所需的时间是完全相同的. 因此摆线又叫等时线. 我们对摆线的等时问题作如下讨论

图 182 是摆线

$$\begin{cases} x = a(\phi - \sin\phi) & \phi \in [0, 2\pi] \\ y = a(1 - \cos\phi) \end{cases}$$

的一支. C 点是曲线的谷底,对应于 $\phi = \pi$ 的位置. 那末一颗珠子,无论从曲线上 O,A,或 B 点,或其它任一点由静止开始沿曲线下滑到 C 点所用的时间是相同的.

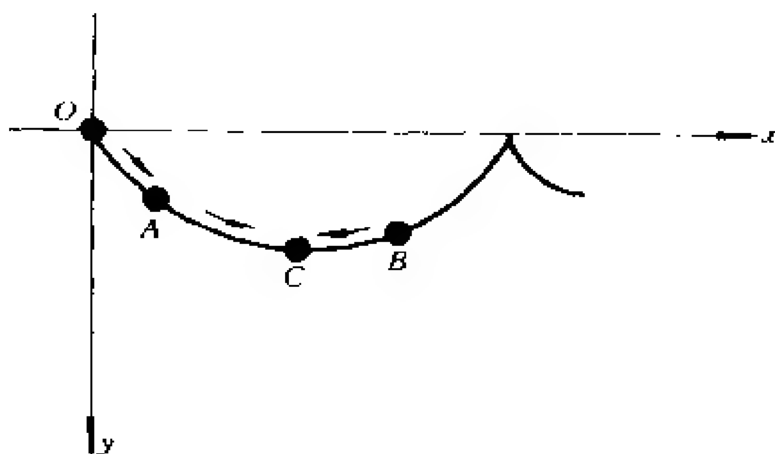


图 182 摆线上从 O,A,B 三点同时滑下的珠子将同时到达 C

解: 设 A 点的坐标为(x_0, y_0),对应于 $\phi = \phi_0$. 珠子的质量为 m,初速为 $v_0 = 0$,求它从 A 点沿曲线下滑到 C 点所用的时间 T.

在 A 与 C 点之间某点(x, y)处,珠子的速度 v 由能量守恒定律下式成立.

$$mg(y - y_0) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore \qquad v = \sqrt{2g(y - y_0)} \tag{1}$$

另一方面,珠子沿曲线下滑,所以 $v = \dfrac{ds}{dt}$

$$\therefore \qquad \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(y - y_0)}$$

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(y-y_0)}} \tag{2}$$

珠子沿摆线 L 从 A 滑到 C 点所需时间

$$T = \int_{L(A)}^{(C)} \frac{ds}{\sqrt{2g(y-y_0)}} = \int_{L(A)}^{(C)} \frac{\sqrt{(x'_\phi)^2+(y'_\phi)^2}}{\sqrt{2g(y-y_0)}} d\phi$$

$$= \int_{\phi_0}^{\pi} \frac{\sqrt{[a(1-\cos\phi)]^2+[a\sin\phi]^2}}{\sqrt{2g(a\cos\phi_0 - a\cos\phi)}} d\phi$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\phi_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2-2\cos\phi}{2(\cos\phi_0-\cos\phi)}} d\phi$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\phi_0}^{\pi} \frac{\sin\frac{\phi}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{\phi_0}{2}-\cos^2\frac{\phi}{2}}} d\phi$$

$$= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\phi_0}^{\pi} \frac{-d\dfrac{\cos\frac{\phi}{2}}{\cos\frac{\phi_0}{2}}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\cos\frac{\phi}{2}}{\cos\frac{\phi_0}{2}}\right)^2}}$$

$$= -2\sqrt{\frac{a}{g}} \arcsin\left(\frac{\cos\frac{\phi}{2}}{\cos\frac{\phi_0}{2}}\right)\Bigg|_{\phi_0}^{\pi} = \pi\cdot\sqrt{\frac{a}{g}}$$

它与起点的位置 ϕ_0 无关.

参考文献： [27],p.1071~1072;[30],第2册,p.322~327.

183、小岛在涨潮与落潮之间的面积变化

设在海湾中,海潮的高潮与低潮之间的差是 2 米. 一个小岛的陆地高度 $z=30\left(1-\frac{x^2+y^2}{10^6}\right)$(单位为米). 并设水平面 $z=0$ 对应于低潮的位置. 求高潮与低潮时小岛露出水面的面积之比.

解: 本题是求曲面面积问题. 由题设已知曲面的方程是 $z=30\left(1-\frac{x^2+y^2}{10^6}\right)$. 根据求曲面面积的公式

$$S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

关键是找出高潮与低潮时的 D_{xy}. 低潮时, $z=0$,

$$\therefore\quad 0=30\left(1-\frac{x^2+y^2}{10^6}\right)$$

故
$$D_{xy(低)}:x^2+y^2\leqslant 10^6.$$

在高潮时, $z=2$, $\quad 2=30\left(1-\frac{x^2+y^2}{10^6}\right)$,

故
$$D_{xy(高)}:x^2+y^2\leqslant 10^6\left(1-\frac{1}{15}\right)=10^6\cdot\frac{14}{15}.$$

计算
$$\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}=\sqrt{1+\frac{36(x^2+y^2)}{10^{10}}}$$

用极坐标计算:

$$低潮时面积\ S_{低}=\iint_{D_{xy(低)}}\sqrt{1+\frac{36(x^2+y^2)}{10^{10}}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{10^3}\sqrt{1+\frac{36r^2}{10^{10}}}\,r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot\frac{10^{10}}{72}\int_0^{10^3}\cdot\left(1+\frac{36r^2}{10^{10}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{d}\left(1+\frac{36r^2}{10^{10}}\right)$$

$$= \frac{10^{10}}{36}\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{36r^2}{10^{10}}\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^{10^3}$$

$$= \frac{10^4}{54}\pi \cdot 5404.857$$

同样可算得.

$$S_{高} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{10^3\sqrt{\frac{14}{15}}} \left(1 + \frac{36r^2}{10^{10}}\right)^{\frac{1}{2}} r dr$$

$$= \frac{10^{10}}{54}\pi\left(1 + \frac{36r^2}{10^{10}}\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^{10^3\sqrt{\frac{14}{15}}}$$

$$= \frac{10^4}{54}\pi \cdot 5044.2313$$

面积比$\frac{S_{高}}{S_{低}} = 0.9333$.

参考文献： [3],下册,p.252.

184、通讯卫星的覆盖面积

一颗地球同步轨道通讯卫星的轨道位于地球的赤道平面内，且可近似认为是圆轨道.通讯卫星运行的角速率与地球自转的角速率相同，即人们看到它在天空不动.若地球半径取为 $R = 6400$km,问卫星距地面的高度 h 应为多少？试计算通讯卫星的覆盖面积.

解： 设卫星距地面高度为 h.卫星所受的万有引力为 $G\frac{Mm}{(R+h)^2}$，卫星所受离心力为 $m\omega^2(R+h)$.其中 M 是地球质量，m 是卫星质量，ω 是卫星运行的角速率，G 是万有引力常数.根据牛顿第二定律

$$G\frac{Mm}{(R+h)^2} = m\omega^2(R+h)$$

$$\therefore \qquad (R+h)^3=\frac{GM}{\omega^2}=\frac{GM}{R^2}\cdot\frac{R^2}{\omega^2}=g\frac{R^2}{\omega^2} \qquad (1)$$

其中 g 为重力加速度常数.

将 $g=9.8, R=6400000, \omega=\frac{2\pi}{24\times3000}$,代入(1)

则有

$$h=\sqrt[3]{g\frac{R^2}{\omega^2}}-R=\sqrt[3]{9.8\frac{6400000^2\times24^2\times3600^2}{4\pi^2}}-6400000$$

$$\doteq 36000000(m)=36000(\text{km})$$

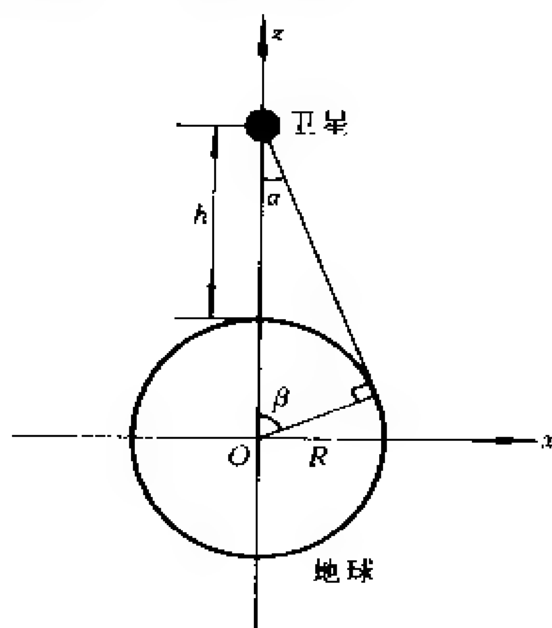


图 184　卫星覆盖面积

取地心为坐标原点,地心到卫星中心的联线为 z 轴建立坐标系,如图 184 所示(为简明,仅画出了 xoz 平面).

卫星的覆盖面积为

$$S=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

其中Σ是上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(z\geqslant0)$上被圆锥角 β 所限定的曲面部分.

$$S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D_{xy}:x^2+y^2\leqslant R^2\sin^2\beta.$$

利用极坐标变换,

$$S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\sin\beta}\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}r\mathrm{d}r=2\pi R\int_0^{R\sin\beta}\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\mathrm{d}r$$

$$=2\pi R\left[-\sqrt{R^2-r^2}\,\right]_0^{R\sin\beta}=2\pi R(R-\sqrt{R^2-R^2\sin^2\beta})$$

$$=2\pi R^2(1-\cos\beta)$$

由于 $\cos\beta=\sin\alpha=\frac{R}{R+h}$,代入上式得

$$S=2\pi R^2\left(1-\frac{R}{R+h}\right)=2\pi R^2\left(\frac{h}{R+h}\right)=4\pi R^2\frac{h}{2(R+h)}\qquad(2)$$

注意到地球的表面积为 $4\pi R^2$,可知因子$\frac{h}{2(R+h)}$恰为卫星覆盖面积与地球表面积的比例系数.将 $R=6.4\times10^6$,$h=36\times10^6$ 代入

$$\frac{h}{2(R+h)}=\frac{36\times10^6}{2(36+6.4)\times10^6}\doteq0.425$$

可以看到卫星覆盖了全球三分之一以上的面积,故使用三颗相间为$\frac{2\pi}{3}$的通讯卫星就可以覆盖几乎全部地球表面.

最后,利用(2)计算出通讯卫星的实际覆盖面积

$$S=4\pi\times(6.4\times10^6)^2\times0.425=2.19\times10^{14}(\mathrm{m}^2)$$
$$=2.19\times10^8(\mathrm{km}^2)$$

注: 已知卫星离地面距离为 h 时,其覆盖面积也可用球冠面积公式 $S=2\pi RH$(R 为球半径,H 为球缺高)直接计算.显然,

$$H=R-R\cos\beta=R\left(1-\frac{R}{R+h}\right)=\frac{Rh}{R+h},$$

故 $S=2\pi RH=2\pi R^2\frac{h}{R+h}$.

参考文献： [69],p.83.

185、电荷移动做功

设有一平面电场，它是由位于原点 O 的正电荷 q 产生的，另有一单位正电荷沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限部分从 $A(a,0)$ 移动到 $B(0,b)$. 求电场力对这个单位正电荷所做的功.

解： 如图 185，

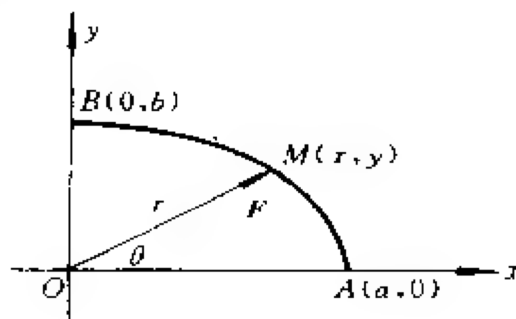


图 185 电荷移动做功

设电场力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(x,y)$

$$|\boldsymbol{F}|=\frac{kq}{r^2}=\frac{kq}{x^2+y^2}(k\ \text{为常数})$$

$\boldsymbol{F}$ 在 x 轴上的投影为

$$P(x,y)=|\boldsymbol{F}|\cos\theta=\frac{kq}{r^2}\times\frac{x}{r}$$

$$=\frac{kqx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$\boldsymbol{F}$ 在 y 轴上的投影为

$$Q(x,y)=|\boldsymbol{F}|\sin\theta=\frac{kq}{r^2}\times\frac{y}{r}=\frac{kqy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

有 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}=\dfrac{kq}{(x^2+y^2)^{3/2}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$

于是 $\boldsymbol{F}$ 对单位正电荷所做的功为

$$W=\int_{\widehat{AB}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_{\widehat{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=kq\int_{\widehat{AB}}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

为了计算上面的曲线积分，把椭圆方程用参数方程表示即

$$x=a\cos t,y=b\sin t\qquad(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2})$$

于是

$$\begin{aligned}W&=kq\int_{\widehat{AB}}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\\&=kq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-a^2\cos t\sin t+b^2\sin t\cos t}{(a^2\cos^2t+b^2\sin^2t)^{3/2}}\mathrm{d}t\\&=kq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(b^2-a^2)\sin t\cos t}{[a^2+(b^2-a^2)\sin^2t]^{3/2}}\mathrm{d}t\\&=\frac{-kq}{[a^2+(b^2-a^2)\sin^2t]^{1/2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=kq\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\end{aligned}$$

参考文献： [64]，下册，p.426～427；[1]，下册，p.380.

186、分针与时针何时重合

在下午一点到两点之间的什么时间，一个时钟的分针恰好与时针重合？

解： 从下午一点开始，当分针走到 1 时，时针走到 $\left(1+\frac{1}{12}\right)$；当分针赶到 $\left(1+\frac{1}{12}\right)$时，时针又向前走到了 $\left(1+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}\right)$，…，依此类推，分针要追上时针需费时

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}+\cdots$$

上式是一个首项 $a=\frac{1}{12}$，公比 $q=\frac{1}{12}$ 的等比级数，因为 $|q|=\frac{1}{12}<1$，故此级数收敛，其和为 $\frac{a}{1-q}=\frac{\frac{1}{12}}{1-\frac{1}{12}}=\frac{1}{11}$（小时）$=5\frac{5}{11}$（分）$\approx$5 分零 27 秒 27. 即，分针要追上时针需要的时间为 5 分零 27 秒 27，也就是说，分针与时针重合的时间为下午 1 点零 5 分零 27 秒 27.

注：此题也可用初等数学的方法求解，解答如下：

一般钟面分为 60 格，分针每分钟转过 1 格，时针 1 小时转过 5 格，即每分钟转 $\frac{1}{12}$ 格. 一点整时，时针在分针前 5 格，故分针追上时针的时间应是

$$t=\frac{5}{1-\frac{1}{12}}=5\frac{5}{11}(\text{分})\approx 5\text{ 分零 }27\text{ 秒 }27$$

即，5 分零 27 秒 27 后分针与时针重合.

思考题：在 i 点与 $(i+1)$ 点 $(i=2,3,\cdots,11)$ 之间的什么时间，分针与时针重合？（答案：$i+\frac{i}{11}$，$i=2,3,\cdots,11$）

参考文献： [1]，下册，p.84.

187、多波型信号发生仪中正弦波形逼近的优化设计

在电路设计中，产生正弦波形有多种方法，一般分为直接法与间接法. 在间接法中，用折线函数来逼近正弦曲线（见图 187）是在

信号波形变换中行之有效且普遍应用的重要方法.但在具体应用中,碰到了这样一个难题:当折线的段数选定后,子区间的端点$x_1, x_2, \cdots, x_n$应如何分布,才能使其非线性失真系数γ最小?

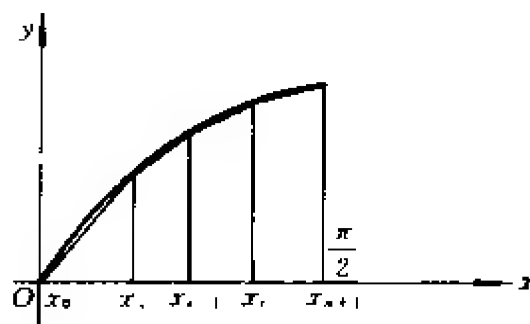


图 187　正弦波形的逼近

分析建模:　由电子学专业的有关知识,知非线性失真系数γ的计算公式为

$$\gamma = \sqrt{v_2^2 + v_3^2 + \cdots + v_n^2 + \cdots} / v_1 \tag{1}$$

其中v_1表示折线函数基波的有效值,$v_2, v_3, \cdots, v_n, \cdots$表示高次谐波的有效值.由于此$\gamma$是用无穷级数表达的,很难直接应用,故需寻求其它简便实用的计算γ的公式.为此,我们由γ的上述定义出发,去严格推导由所选点$x_1, x_2, \cdots, x_n$直接表达γ的显式公式.

因$\sin x$是奇函数,要想用一折线函数$f(x)$去逼近它,$f(x)$也应设为奇函数.显然,$f(x)$满足狄利克雷(Dirichlet)条件,所以,其傅氏级数展开式为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

其中
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{2}$$

由于
$$v_n = \frac{1}{\sqrt{2}} b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

所以 $$\gamma=\sqrt{b_2^2+b_3^2+\cdots+b_n^2+\cdots}/b_1 \tag{3}$$
显然，$f(x)$在$[0,2\pi]$上平方可积，由著名的帕塞法耳(Parseval)等式[或称李雅普诺夫(ляпунов,Λ.м.)公式]

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

知 $$\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\mathrm{d}x-b_1^2 \tag{4}$$

由(3),(4)和(2)得

$$\gamma^2=\frac{\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n^2}{b_1^2}=\frac{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\mathrm{d}x}{\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\right)^2}-1 \tag{5}$$

由(5)式可知，当 $f(x)=\sin x$ 时，$\gamma=0$；$f(x)$越接近 $\sin x$，γ 越小.特别地，当 $f(x)$为 $\sin x$ 的内接折线函数时，可定义

$$f_i(x)=(c_i x+d_i)X[x_i,x_{i+1}] \quad (i=0,1,\cdots,n)$$

其中 $X[x_i,x_{i+1}]$为区间$[x_i,x_{i+1}]$上的特征函数.于是有

$$f^2(x)\overset{a.s}{=\!=}\left(\sum_{i=0}^{n} f_i(x)\right)^2=\sum_{i=0}^{n} f_i^2(x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_i^2(x)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{3c_i}(\sin^3 x_{i+1}-\sin^3 x_i)$$

其中 $$f_i(x_i)=\sin x_i,\ f_i(x_{i+1})=\sin x_{i+1},$$
其中 $$c_i=(\sin x_{i+1}-\sin x_i)/(x_{i+1}-x_i)$$
即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i)(\sin^2 x_{i+1}$$
$$+\sin x_i\cdot\sin x_{i+1}+\sin^2 x_i)$$
$$=\frac{1}{3}(x_{n+1}\sin^2 x_{n+1}-x_0\sin^2 x_0)$$

$$+\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}\sin x_i - x_i\sin x_{i+1})$$
$$\cdot(\sin x_{i+1}+\sin x_i)$$
$$=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}\sin x_i - x_i\sin x_{i+1})$$
$$\cdot(\sin x_{i+1}+\sin x_i) \tag{6}$$

还有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(c_i x + d_i)\sin x\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{i=0}^{n}(\sin x_{i+1}-\sin x_i)^2/(x_{i+1}-x_i) \tag{7}$$

又因 $f(x)$可看作是以 2π 为周期、关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称的函数，所以

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\mathrm{d}x$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\mathrm{d}x$$

若记 $s_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\mathrm{d}x, s_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\mathrm{d}x$

则由(5)、(6)和(7)式可得

$$\gamma^2=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{s_1}{(s_2)^2}-1 \tag{8}$$

其中 s_1、s_2 分别由(6)和(7)式计算，$x_0=0, x_{n+1}=\frac{\pi}{2}$ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是待优选的 n 个点.(8)式就是由所选点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 直接去求 γ 的显式公式.

这样，我们便得到了本问题的一个数学模型，即

模型 I $$\begin{cases}\min\ \gamma^2=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{s_1}{(s_2)^2}-1\\ s.t\quad 0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

到此,问题似乎解决了,但经过实验和测试,发现并不适用.分析原因,一是这里的 γ 虽然是显式,但仍较复杂,振荡相当厉害.二是由于微机的精度有限(10^{-6}),当 x 的第六位有效数字有微小变化时,就会引起 γ 的很大变化.因此,必须继续寻求更合适的目标函数.

从图 187 可直观地看出,"用折线函数 $f(x)$最佳逼近 $\sin x$"与"使 $\sin x$ 与 $f(x)$之间的夹缝面积 S 最小"是等价的.而且由(5)式可知,γ 与 $f(x)$在整个区间上的积分有关.这就启发我们,可用 $\sin x$ 与折线 $f(x)$之间所夹面积 S 来衡量 γ 的大小.也就是说优化 S 就是优化 γ.而 S 的计算是很容易的(用曲线 $y=\sin x$ 与 $x=0$、$x=\frac{\pi}{2}$ 和 x 轴所围面积减去$(n+1)$个直角梯形面积之和).于是,可以建立如下既简单又较切合实际的数学模型Ⅱ来取代模型Ⅰ:

$$\text{模型Ⅱ}\quad\begin{cases}\min S = I - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}(\sin x_i + \sin x_{i-1})\cdot(x_i - x_{i-1})\\ s.t\quad 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

其中 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$,$\frac{1}{2}(\sin x_i+\sin x_{i-1})(x_i-x_{i-1})$为第 i 个小直角梯形的面积.

本模型的建立过程告诉我们一个重要思想:当要优化的目标函数无法写出解析表达式,或者虽能写出但较复杂时,如果还要以此为目标函数,就有可能使问题得不到解决,在这种情况下必须灵活运用所学知识寻求更合适的目标函数.

关于模型Ⅱ的求解,已不属本书的写作范围,这里从略,有兴趣的读者可以阅读参考文献[17].需要告诉读者的是,利用此模型设计产生的正弦信号,其非线性失真系数 γ 的指标较其它设计大为改进,取得了满意的结果.显然这种方法对于其它波形的逼近也

普遍有效,这就为电路设计提供了一个新思路,打开了一个新局面.

参考文献: [17],p.305~314.

188、矩形脉冲信号的频谱分析

如图 188-1 之矩形脉冲,其周期为 T,频率 $\omega=\frac{2\pi}{T}$,脉冲宽度为 τ,高度为 E.试画出它的频谱图并分析之.

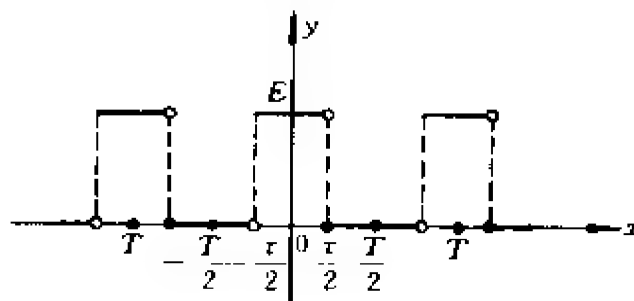


图 188-1 矩形脉冲信号

解: 傅氏级数在电子技术中的重要应用之一是利用它作频谱分析.我们知道,一个周期函数 $f(x)$ 展开为傅氏级数,在物理上意味着将一个较复杂的周期波形分解为许多不同频率的正弦波的迭加.这些正弦波的频率通常称为 $f(t)$ 的频率成分.如果 $f(t)$ 的周期为 T,令 $\omega=\frac{2\pi}{T}$,那么 $f(t)$ 的频率成分(用角频率表示)就是

$$\omega,2\omega,3\omega,\cdots,n\omega,\cdots\cdots$$

在许多实际问题中,还需要进一步搞清楚每一种频率成分的正弦波的振幅有多大,这在物理和工程技术上就称为"频谱分析".而把各次谐波的振幅 $|c_n|$ 与频率 ω 的函数关系画成的线图称为"频谱

图". 这里 c_n 的计算由复数形式的傅氏系数公式给出.

关于矩形脉冲信号的复数形式的傅氏展开式及傅氏系数，同济大学编的高等数学教材（第三版 p343—344）中已经求出，这里直接引用：

$$c_0 = \frac{E\tau}{T}$$

$$c_n = \frac{E}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T}$$

$$f(t) = \frac{E\tau}{T} + \frac{E}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}e^{jn\omega t}$$

$$\left(-\infty < t < +\infty; t \neq \pm\frac{\tau}{2}, \pm\frac{\tau}{2}\pm T, \cdots\right)$$

有了 c_n，便可方便地作出它的频谱图（见表 188 及图 188－2），这里设脉冲宽度 $\tau = \frac{T}{3}$.

表 188　矩形脉冲信号的"振幅频谱"

n	直流分量	1	2	3	4	5	6	7	…
$\lvert c_n\rvert$	$\frac{E}{3}$	$\frac{\sqrt{3}E}{2\pi}$	$\frac{\sqrt{3}E}{2\pi}\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}E}{2\pi}\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}E}{2\pi}\frac{1}{5}$	0	$\frac{\sqrt{3}E}{2\pi}\frac{1}{7}$	…

从频谱图上看到，频率 $3\omega_1, 6\omega_1, \cdots$ 对应的 $\lvert c_n\rvert = 0$（这些点称为谱线的零点. 其中 $3\omega_1 = 3\cdot\left(\frac{2\pi}{T}\right) = \frac{2\pi}{\frac{T}{3}} = \frac{2\pi}{\tau}$ 叫第一个零值点）. 在第一个零值点后，振幅相对减少，可以忽略不记. 因此，矩形脉冲的频带宽度（谱线的第一个零值点以内的频率范围称为信号的频带宽度）为

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

我们还看到，矩形脉冲的频谱是离散的，也就是说，它的谱线

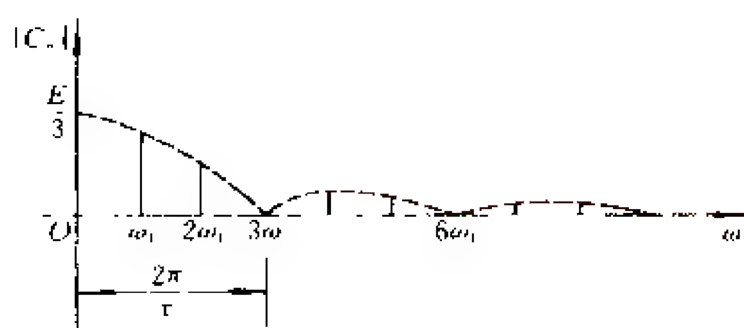


图 188－2　矩形脉冲信号的频谱图

是一条一条分开的. 其间的距离是 $\omega_1=\frac{2\pi}{T}$. 而且，当脉冲宽度 τ 不变时，增大周期（即相邻的脉冲间隔加大），谱线之间的距离就缩小，也就是周期越大，谱线越密.

参考文献： [6],p.198～201.

189、e 是无理数的证明

设 q 是大于或等于 2 的一个整数，则

a） $0<q!\sum\limits_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{n!}<1$

b） 由此证明 e 不是有理数.

（注：$e=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$）

证明： a）显然有 $q!\sum\limits_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{n!}>0$. 而级数 $\sum\limits_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 的部分和序列 $\{s_k\}$ 是单调上升的.

记

$$s_k=\frac{1}{(q+1)!}+\frac{1}{(q+2)!}+\cdots+\frac{1}{(q+k)!}$$

$$\leqslant \frac{1}{(q+1)!}+\frac{1}{(q+1)!\,(q+1)}+\cdots+$$

$$\frac{1}{(q+1)!}\cdot\frac{1}{(q+1)^{k-1}}$$

$$=\frac{1}{(q+1)!}\left(1+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(q+1)^{k-1}}\right)$$

$$\therefore\quad \lim_{k\to+\infty} S_k \leqslant \frac{1}{(q+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}}=\frac{1}{q\cdot q!},$$

$$\therefore\quad \sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

收敛,且

$$q!\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{n!}\leqslant q!\cdot\frac{1}{q\cdot q!}=\frac{1}{q}<1$$

b)假设 e 是有理数,那末 $e=\frac{p}{q}$,其中 p,q 是两个互素的正整数,$q\geqslant 2$.于是由 $p=eq$ 及 $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 可得到

$$p[(q-1)!]=e\cdot q\cdot(q-1)!=e\cdot q!$$

$$=q!\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

进而有 $$p\cdot(q-1)!=q!\sum_{n=0}^{q}\frac{1}{n!}+q!\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

等式的左边显然是整数,而等式右边的第一项也是整数,第二项由 a)知为小数,这样就导出矛盾,所以 e 不能是有理数.

参考文献: [25],p.839.

190、p 进制无限循环小数怎样化成分数

在计算机科学中,通常采用二进制、八进制和十六进制进行运

算.更一般地,在科学研究中有时也需要采用 p 进制来表示一个实数.请研究一个 p 进制的无限循环小数怎样才能化成为十进制分数?并求出下列循环小数的分数形式:

(1) $x=0.123123123\cdots$ (十进制)

(2) $x=0.515151\cdots$ (九进制)

(3) $x=0.111011101110\cdots$ (二进制)

(4) $x=0.777\cdots$ (八进制)

解: 设 $x=0.a_1a_2\cdots a_ka_1a_2\cdots a_k\cdots$是任意一个 p 进制的无限循环小数.此处 p 是自然数.$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是 0 与 $p-1$ 之间的任意整数,k 是循环节的长度.

根据 p 进制数的定义,把 x 写成

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p^2}+\cdots\frac{a_k}{p^k}+\frac{a_1}{p^{k+1}}+\cdots+\frac{a_k}{p^{k+k}}+\cdots \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a_1}{p^{lk+1}}+\frac{a_2}{p^{lk+2}}+\cdots+\frac{a_k}{p^{lk+k}}\right) \\
&= \left(\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p^2}+\cdots+\frac{a_k}{p^k}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{p^{lk}} \\
&= \left(\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p^2}+\cdots+\frac{a_k}{p^k}\right)\frac{p^k}{p^k-1} \\
&= \left(\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p^2}+\cdots\frac{a_k}{p^k}\right)\frac{p^k}{p^{k-1}} \\
&= \frac{a_1p^{k-1}+a_2p^{k-2}+\cdots+a_{k-1}p+a_k}{p^k-1}
\end{aligned}
$$

这样,我们把一个 p 进制循环小数化成了十进制的分数.下面进行具体计算:

(1) $x=0.123123123\cdots$ (十进制)

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^{3k+1}}+\frac{2}{10^{3k+2}}+\frac{3}{10^{3k+3}}\right) \\
&= \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{10^{3k}}+\frac{2}{100}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{10^{3k}}+\frac{3}{1000}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{10^{3k}}
\end{aligned}
$$

$$=\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{10^{3k}}=\frac{123}{1000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10^3}}=\frac{123}{999}$$

(2) $x=0.515151\cdots$ （九进制）

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5}{9^{2k+1}}+\frac{1}{9^{2k+2}}\right)=\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{81}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{9^{2k}}$$

$$=\frac{46}{81}\frac{1}{1-\frac{1}{81}}=\frac{46}{80}$$

(3) $x=0.111011101110\cdots$ （二进制）

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{4k+1}}+\frac{1}{2^{4k+2}}+\frac{1}{2^{4k+3}}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{16}}=\frac{14}{15}$$

(4) $x=0.777\cdots$ （八进制）

$$=\frac{7}{8}+\frac{7}{8^2}+\frac{7}{8^3}+\cdots=7\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{8^k}$$

$$=7\cdot\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=1$$

思考题： 怎样将十进制的分数化成 p 进制小数？

提示： $x=\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p^2}+\cdots+\frac{a_k}{p^k}+\frac{a_1}{p^{k+1}}+\cdots \qquad (0<x<1)$

用 p 乘以 x 后，$px=a_1+\frac{a_2}{p}+\frac{a_3}{p^2}+\cdots+\frac{a_k}{p^{k-1}}+\frac{a_1}{p^k}+\cdots$

所以整数部分就是 a_1．从 px 中减去 a_1，得到

$$y=\frac{a_2}{p}+\frac{a_3}{p^2}+\cdots$$

再用 p 乘以 y，整数部分即为 a_2．重复上述步骤即可．

参考文献： [68],p.51.

191、如何计划家庭教育基金

从1994年开始，我国逐步实行了大学收费制度.为了保障子女将来的教育经费，小张夫妇从他们的儿子出生时开始，每年向银行存入 x 元作为家庭教育基金.若银行的年复利率为 r，试写出第 n 年后教育基金总额的表达式.预计当子女18岁进入大学时所需费用为30000元，按年利率10%计算，小张每年应向银行存入多少元？

解： 设 n 年后教育基金总额为 a_n，每年向银行存入 x 元，依据复利计算公式有如下递推关系：

$$\begin{cases} a_k = a_{k-1}(1+r) + x, k = 1,2,\cdots & (1) \\ a_0 = x & (2) \end{cases}$$

由(1)递推可得

$$\begin{aligned} a_k - a_{k-1} &= (a_{k-1} - a_{k-2})(1+r) \\ &= (a_{k-2} - a_{k-3})(1+r)^2 \\ &= \cdots = (a_1 - a_0)(1+r)^{k-1} \end{aligned}$$

由初始条件(2)可得 $a_1 = x(1+r) + x, a_1 - a_0 = x(1+r)$.

$$\therefore \quad a_k - a_{k-1} = x(1+r)^k, k = 1,2,\cdots \qquad (3)$$

将(3)对 $k = 1,2,\cdots,n$ 求和

$$a_n - a_0 = x\sum_{k=1}^{n}(1+r)^k$$

所以，n 年后的教育基金总额为

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + x\sum_{k=1}^{n}(1+r)^k \\ &= x\sum_{k=0}^{n}(1+r)^k = x\frac{(1+r)^{n+1}-1}{r} \qquad (4) \end{aligned}$$

欲使 $a_{18} = 30000$，将 $n = 18, r = 0.1$ 代入(4)

$$x=\frac{a_n r}{(1+r)^{n+1}-1}=\frac{30000\times 0.1}{1.1^{19}-1}=586.40(\text{元})$$

因此，小张每年应向银行存入 586.40 元.

思考题： 按照本题的解法还可以解决分期付款问题.设小张向银行贷款 A_0 元用于买房，贷款年利率为 r，从第二年起，小张每年向银行还 x 元. n 年后小张尚欠银行贷款额记为 A_n，试推导 A_n 的表达式.

(解：$A_0=A_0, A_1=A_0(1+r)-x,\cdots,A_n$
$=A_{n-1}(1+r)-x$.

解此递推式得：$A_n=A_0(1+R)^N-x\ \frac{(1+R)^N-1}{R}$)

参考文献： [54].

192、药物在体内的残留量

患有某种心脏病的病人经常要服用洋地黄毒苷(digitoxin).洋地黄毒苷在体内的清除速率正比于体内洋地黄毒苷的药量.一天(24 小时)大约有 10% 的药物被清除.假设每天给某病人 0.05mg的维持剂量，试估算治疗几个月后该病人体内的洋地黄毒苷的总量.

解： 给病人 0.05mg 的初始剂量，一天后，0.05mg 的 10% 被清除，体内将残留(0.90)(0.05)mg 的药量；在第二天末，体内将残留(0.90)(0.90)(0.05)mg 的药量；如此下去，第 n 天末，体内残留的药量为$(0.90)^n(0.05)$mg.如图 192 所示.

要确定洋地黄毒苷在体内的累积残留量.我们注意到，在第二次给药时，体内的药量为第二次给药的剂量 0.05mg 加上第一次给药此时在体内的残留量(0.90)(0.05)mg；在第三次给药时，体内的药量为第三次给药的剂量 0.05mg 加上第一次给药此时在体

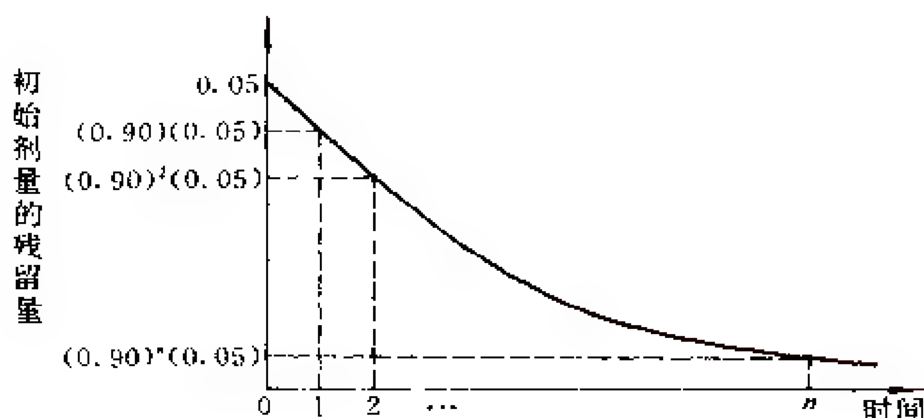


图 192　初始剂量的指数衰减

内的残留量$(0.90)^2(0.05)$mg 和第二次给药此时在体内的残留量$(0.90)(0.05)$mg；在任何一次重新给药时，体内的药量为此次给药的剂量 0.05mg 加上以前历次给药此时在体内的残留量．为了清楚地理解上述内容，请看下表．

体内洋地黄毒苷的总量(mg)

初始给药后的天数	
0	0.05
1	$0.05+(0.90)(0.05)$
2	$0.05+(0.90)(0.05)+(0.90)^2(0.05)$
⋮	⋮
n	$0.05+(0.90)(0.05)+(0.90)^2(0.05)+\cdots+(0.90)^n(0.05)$

我们看到，每一次重新给药时体内的药量是下列几何级数的部分和：

$$0.05+(0.90)(0.05)+(0.90)^2(0.05)+(0.90)^3(0.05)+\cdots,$$

这个级数的和为$\frac{a}{1-r}=\frac{0.05}{1-0.90}=\frac{0.05}{0.10}=0.5$

由于此级数的部分和趋近于此级数的和，所以我们说，每天给病人 0.05mg 的维持剂量将最终使病人体内的洋地黄毒苷水平达到一个 0.5mg 的“坪台”．

当我们要将“坪台”降低 10%，也就是让坪水平达到(0.90)

(0.5)=0.45mg 时,我们就需调整维持剂量,这在药物的治疗中是一个重要的技术.

参考文献: [47],p.573~574.

193、经济中的乘子效应

设想联邦政府通过一项削减 100 亿美元税收的法案. 假设每人将花费这笔额外收入的 93%,并把其余的存起来. 试估算削减税对经济活动的总效应.

解: 削减税后人们的收入增加了. (0.93)(100)亿美元将被用于消费. 对某些人来说,这些钱变成了额外的收入,它的 93% 又被用于消费,因此又增加了(0.93)(0.93)(100)亿美元的消费. 这些钱($0.93^2\times100$ 亿美元)的接受者又将花费它的 93%,即又增加了$(0.93)(0.93^2)(100)=(0.93)^3(100)$亿美元的消费. 如此下去,削减税后所产生的新的消费的总和由下列无穷级数给出:

$$100(0.93)+100(0.93)^2+100(0.93)^3+\cdots+100(0.93)^n+\cdots$$

这是一个初项为 100(0.93),公比为 0.93 的几何级数,此级数收敛,它的和为:

$$\frac{a}{1-r}=\frac{100(0.93)}{1-0.93}=\frac{93}{0.07}\approx1328.6\text{ 亿美元}$$

削减 100 亿美元的税收将产生附加的消费大约 1328.6 亿美元.

此例描述了乘子效应(the multiplier effect). 每人将花费一美元额外收入的比例被称作"边际消费倾向"(the marginal propensity to consume),记为 MPC. 在本例中,MPC=0.93,正如我们上面所讨论的,削减税后所产生的附加消费的总和为:

$$\text{附加消费的总和}=100\cdot\frac{0.93}{1-0.93}=[\text{削减税额}]\cdot\frac{\text{MPC}}{1-\text{MPC}}$$

削减税额乘以“乘子”$\frac{MPC}{1-MPC}$就是它的实际效应.

参考文献：［47］,p.573.

194、n 年后提取 n^2 元需存入多少钱

设年利率为 i,依复利计算,想要在第一年末提取 1 元,第二年末提取 4 元,第三年末提取 $3^2=9$ 元,…,在第 n 年末提取 n^2 元.要能永远如此提取,问至少需要事先存入多少本金?这里本金为存入的钱,设为 A,则一年后本金与利息之和称为一年的本利和,即为 $A(1+i)$,两年后的本利和为 $A(1+i)^2$,…n 年后的本利和为 $A(1+i)^n$.

解： 若本金为$(1+i)^{-n}$元,n 年后可提取本利和:

$$(1+i)^{-n}\cdot(1+i)^n=1(\text{元}).$$

n 年后若要提取 n^2 元本利和,则本金应为 $n^2(1+i)^{-n}$元.所以为使第一年末提取 1 元本利和,则要有本金$(1+i)^{-1}$;第二年末能提取 $2^2=4$ 元本利和,则要有本金 $2^2\cdot(1+i)^{-2}$ 元;第三年末能提取 $3^2=9$ 元本利和,则要有本金 $3^2\cdot(1+i)^{-3}$元;…;第 n 年末能提取 n^2 元本利和,则要有本金 $n^2\cdot(1+i)^{-n}$元;如此下去,所需本金总数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(1+i)^{-n}$$

由于 $$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty} x^n \qquad (-1<x<1)$$

故 $$\frac{x}{(1-x)^2}=x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \quad -1<x<1$$

又 $$\frac{x+x^2}{(1-x)^3}=x\frac{1+x}{(1-x)^3}=x\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n \qquad (\text{当} |x| < 1)$$

置 $x = 1/(1+i)$，便得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (1+i)^{-n} = \frac{\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{(1+i)^2}}{\left(1 - \dfrac{1}{1+i}\right)^3} = \frac{(1+i)(2+i)}{i^3}$$

所以，要想能永远如此提取，至少需事先存入

$$\frac{(1+i)(2+i)}{i^3}$$

元本金.

思考题：

(1) 如果每年提取 1 元，至少需事先存入多少元本金？第 n 年提取 n 元呢？

(2) 第 n 年提取多少时，永远如此提取将不能实现？

解： (1) 由上面的公式

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

可知，因为 $x = \dfrac{1}{1+i}$，所以每年提取一元，则需事先存入

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+i}\right)^n = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{1+i}} = \frac{1+i}{i} (\text{元})$$

又由上面的公式

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^2 \quad (-1 < x < 1)$$

可知，因为 $x = \dfrac{1}{1+i}$，所以第 n 年提取 n 元，则需事先存入

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{1+i}\right)^n = \frac{\dfrac{1}{1+i}}{\left(1 - \dfrac{1}{1+i}\right)^2} = \frac{1+i}{i^2} (\text{元}).$$

(2) 此题可转化为:第 n 年提取 k_n 元,应当事先存入

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n \left(\frac{1}{1+i}\right)^n (元)$$

要想使永远如此有规律地提取不能实现,则只要取适当的 k_n,使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n x^n$$

在 $x=\frac{1}{1+i}$ 时发散,即可.

而实现这种目的的方法很多,例如使

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{k_n}{k_{n+1}}\right| \leqslant \frac{1}{1+i}$$

于是可取 $k_{n+1} \geqslant (1+i)k_n$.

例如不妨取

$k_1=1, k_2=(1+i), k_3=(1+i)^2, \cdots\cdots k_n=(1+i)^{n-1}, \cdots\cdots$

这时,需事先存入本金为无穷大.即,此种有规律地提取是不能实现的.而事实上,此种提取方式为每年都将本金和利息全提取出来,当然需要事先存入的本金为无穷大.

参考文献: [59],p.255~260.

195、齐诺悖论问题

公元前五世纪,哲学家和数学家齐诺(Zeno)提出了四个问题,这些问题后来被公认为齐诺悖论.在其中的第二个问题中,齐诺辩解说,传说中的希腊英雄阿基勒(Achilles)无论如何也赶不上一只乌龟:假设一开始乌龟在前 100 码(1 码=0.9144 米)处,阿基勒的速度是乌龟的 10 倍.当阿基勒跑完了这 100 码时乌龟向前跑了 10 码;当阿基勒再跑完这 10 码时,乌龟又向前跑了 1 码,…,如此

下去，阿基勒永远也跑不过这只乌龟.

现在我们换一种方式来叙述和讨论这个表面上的悖论，其结果当然也是和常识相矛盾的.

假定一个人离门只有 10 米远(图 195)，利用齐诺的推理，我们可以宣称：此人永远走不到门那里去. 理由如下：

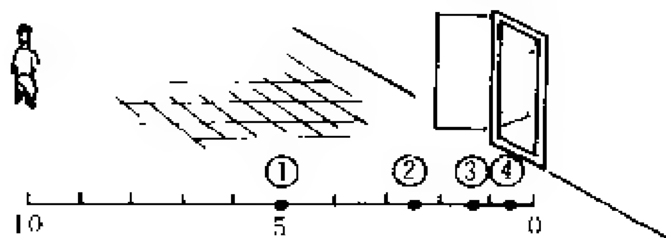


图 195　齐诺悖论：人永远走不到门口.

他要走完这段路程，首先就要走完该路程的一半(5m)，即到达图 195 中的点①处；然后他又必须走完剩下的 5 米的一半$\left(\frac{5}{2}\text{m}\right)$，即到达点②处；…，如此继续下去，那么，不管此人离门已经多近，在他面前总有剩下的路程的一半还没走完，他还得要将剩下的路程一半一半地走下去，永无止境.

尽管连小孩都不会相信齐诺的诡辩，但要彻底驳倒他，却用到 2000 多年后的极限理论. 下面我们就用学过的级数知识证明，事实上这个人在有限的时间内能够到达屋门.

假定此人以每秒 0.5 米的固定速度开始向屋门走去. 我们应用齐诺的论证方式来算算他到达屋门所用的时间. 由 $t=\frac{s}{v}$，此人走到离屋门 5 米远这一点(从离屋门 10 米处开始走)要用 $t_0=\frac{5}{0.5}=10\text{s}$；走到离屋门$\frac{5}{2}$米处要用 $t_1=\frac{\frac{5}{2}}{0.5}=5\text{s}$；再走到下一点要用 $t_2=\frac{\frac{5}{4}}{0.5}=\frac{10}{4}\text{s}$. 由于从一点走到下一点的距离是这点到屋门距

离的一半，所以很显然，接下去所用的时间应依次为$\frac{10}{8}$s，$\frac{10}{16}$s，…，$\frac{10}{2^n}$s，……. 这样，他走到屋门所用的总时间是

$$
\begin{aligned}
t &= 10 + 5 + \frac{10}{4} + \frac{10}{8} + \frac{10}{16} + \cdots + \frac{10}{2^n} + \cdots \\
&= 10\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots\right) \\
&= 10 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 20\text{s}
\end{aligned}
$$

由此可见，所谓齐诺悖论实际上根本不成其为悖论.

参考文献： [1]，上册，p. 49；下册，p. 77.

196、行星的顺向与逆向运动

如果你连续几个星期或者几个月注意观察某颗行星在天上的位置变化，你会发现，行星在星空中走的路线可真有点奇怪，它经常是向东移动（这叫顺行），但有时候却回过“头”来向西走（这叫逆行），走了一段“路”之后，又扭过“头”来向东走. 难道它就是这样忽东忽西地绕着太阳转的吗？

首先，我们要弄清楚，行星在星空中的移动和它实际绕太阳转的运动有联系，但不能混为一谈. 众所周知，行星绕太阳公转的运动，都是步伐一致地朝一个方向——自西向东前进的，从来没有向西退着走的时候. 之所以会出现我们看到的现象，那是因为我们是在运动着的地球上看其它行星的运动，而这些行星围绕太阳运转的速度又比地球绕太阳转的速度快（或者慢）的结果. 图 196 – 1 中画出的火星变动路线可以形象地说明这一点.

那么，行星什么时候从顺向转为逆向运动（或者反过来，从逆

向转向顺向)呢?

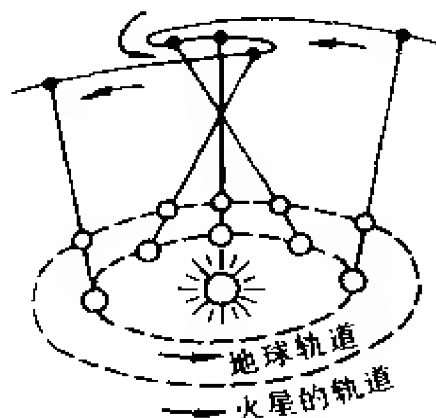


图 196-1　火星在星空中的位置

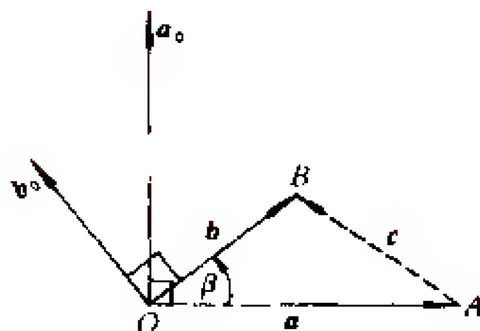


图 196-2　地球、行星绕太阳运转示意图

下面我们用矢量代数和矢量分析的有关知识来解答这一问题.

设地球和行星的轨道(作为黄道* 平面上的圆)半径分别为 r 和 R,运转周期分别为 u 和 U,于是它们围绕太阳旋转的轨道半径分别有 $k=\dfrac{2\pi}{u}$和 $K=\dfrac{2\pi}{U}$的转速.

如图 196-2 所示,若 O、A 和 B 分别表示太阳、地球和行星的中心,则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$和 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$分别为地球和行星离太阳的矢量距.这里 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为"旋转矢量",即它们有定长 r 和 R,且分别以定速度 k 和 K 在黄道平面 E 内围着固定原点 O 旋转.对质点 A、B 运动的速度矢量 $\dot{\boldsymbol{a}}$、$\dot{\boldsymbol{b}}$,容易知道,其大小分别为 kr 和 KR,方向总是分别垂直于$\vec{a}$与 $\boldsymbol{b}$ 的方向的.如果我们假定两矢量 $\boldsymbol{a}^{\circ}$与 $\boldsymbol{b}^{\circ}$以 O 为起点,大小分别为 r 与 R,且总是分别超前旋转矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 各 90°,则有

$$\dot{a}=k\boldsymbol{a}^{\circ},\dot{\boldsymbol{b}}=K\boldsymbol{b}^{\circ}$$

行星离地球的矢量距为 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,对地球上观察者的速度为

$$\dot{c}=\dot{b}-\dot{a}=Kb^{\circ}-ka^{\circ}$$

设矢量 b 在 0 时间超前矢量 a 的角度为 α，在 t 时间超前 a 的角度为 β，则

$$\beta=\alpha+\theta t \tag{1}$$

这里 $\theta=K-k$ 表示 b 在单位时间内超前 a 的角度.

当 c（对观察者而言）按逆时针方向旋转时，行星的运动为顺向；当 c 按顺时针方向旋转时，行星的运动为逆向. 即，根据垂直于 E 的矢量 $\overrightarrow{OS}=c\times\dot{c}$ 的顶点 S 在黄道平面的上方或下方来定顺向或逆向. 现在，

$$\begin{aligned} c\times\dot{c}&=(b-a)\times(\dot{b}-\dot{c})=(b-a)\times(Kb^{\circ}-ka^{\circ})\\ &=p-q \end{aligned}$$

这里 $p=Kb\times b^{\circ}+ka\times a^{\circ}$，$q=Ka\times b^{\circ}+kb\times a^{\circ}$，$p$、$q$ 也以 O 为起点. p 的大小为 KR^2+kr^2，并位于 E 的上方. 从图 196－2 可以看出，q 位于 E 的上方或下方要以 $\cos\beta$ 是正或负来定，并有大小 $(K+k)R\cdot r|\cos\beta|$ 这样，$c\times\dot{c}$ 位于 E 的上方或下方就要以 $(KR^2+kr^2)-(K+k)\cdot Rr\cos\beta$ 的正负来定，即根据

$$\cos\beta\lessgtr\frac{KR^2+kr^2}{(K+k)Rr} \tag{2}$$

而定.

由开普勒第三定律，$U^2:u^2=R^3:r^3$ 或 $k^2:K^2=R^3:r^3$，于是，(2)式右边的 $k:K$ 能被 $W^3:w^3$ 所代替，这里 $W=\sqrt{R}$，$w=\sqrt{r}$. 这样，(2)式右边的值为

$$\frac{w^3W^4+W^3w^4}{(W^3+w^3)W^2w^2}=\frac{(W+w)Ww}{W^3+w^3}=\frac{Ww}{W^2+w^2-Ww}$$
$$=\frac{\sqrt{Rr}}{R+r-\sqrt{Rr}}$$

结论如下：

行星运动的顺向或逆向的根据是

$$\cos\beta \leqslant \frac{\sqrt{Rr}}{R+r-\sqrt{Rr}} \tag{3}$$

在

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{Rr}}{R+r-\sqrt{Rr}} \tag{4}$$

时，运动由一种形式转变为另一种形式.

例： 上合(太阳在地球和内行星**之间的时候)后多少天，金星变为逆向?

解： 这里 $r=149$(百万公里)，$R=107.5$(百万公里)；$k=0.9856^\circ$，$K=1.602^\circ$；$\alpha=180^\circ$. 于是，$\theta=1.602^\circ-0.9856^\circ=0.6164^\circ$，$\frac{\sqrt{Rr}}{R+r-\sqrt{Rr}}=0.974$. 由(1)和(4)式，得

$$-\cos 0.6164t=0.974, \text{或} \cos 0.6164t=-0.974$$

因而 $t=271$ 天. 即上合后 271 天后，金星变为逆向.

注： 行星从顺行变为逆行，或者从逆行变为顺行时，都有一段时间好象在星空中停留不动的样子，叫做"留".

*)地球绕太阳转，不断地改变着自己的位置，看起来好象是太阳在改变"方向"，在星空间不断地东移. 太阳"走"的这条路线就称黄道.

**) 水星、金星的轨道在地球轨道的内侧，称它们为内行星.

参考文献： [15]，天文 1，p.139～141；[20]，p.381～383.

197、促进剂的配方问题

某橡胶厂要制造使橡胶粘在棉布上的促进剂. 发现促进剂中有两种成份——间苯二酚和六次甲基四胺对附着力的影响较大. 该厂原有的配方是：间苯二酚，2.5 克；六次甲基四胺，1.5 克. 得到的附着力为 8 千克力. 现在想再提高附着力的强度，问应如何调整配方?

分析： 我们知道，梯度方向是函数值上升得最快的方向，我们就用梯度法来试试看. 由于这里的附着力与间苯二酚和六次甲基四胺之间的函数关系没有给出，无法求得梯度的精确值，故转用近似方法代之. 即，以差商代替偏导数，以矢量

$$\left(\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h},\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}\right) \quad (1)$$

的方向为近似的梯度方向.

解： 设 $x_0=2.5, y_0=1.5, x_0+h=1.5, y_0+k=1.0$. 作了两次试验，结果如下：

表 197　调整促进剂配方试验数据表

	间苯二酚(g)	六次甲基四胺(g)	附着力(千克力)
原配方	2.5	1.5	8.0
试验 1	1.5	1.5	8.4
试验 2	2.5	1.0	8.3

由(1)式，梯度方向近似于

$$\left(\frac{8.4-8.0}{1.5-2.5},\frac{8.3-8.0}{1.0-1.5}\right)=(-0.4,-0.6)=-0.2(2,3)$$

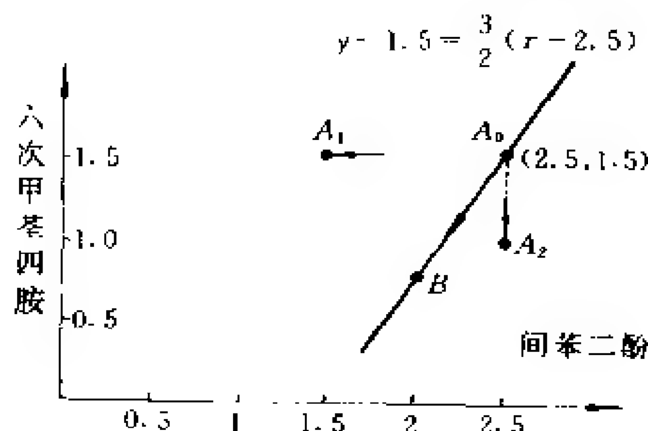


图 197　沿梯度方向找试验点

如图 197，从点 A_0 出发，沿着方向$(-2,-3)$寻找试验点，经测试，点 $B: x=2, y=0.75$ 处的附着力为 8.7 千克力，已经满足生产需要，就不再做下去了．即，新的配方为：间苯二酚 2 克，六次甲基四胺0.75 克．

参考文献： [22]，p.77～78.

198、如何测定太湖最深处

为求太湖的最深深度，先在地面上取定坐标 $O-xy$，z 轴向上，并设湖底曲面可用一连续可微函数 $z=f(x,y)$来表示．于是问题转化为求二元函数 $f(x,y)$的最小值．

现有一测量船，用特制的仪器可以测得湖中每一点的深度，也就是说可以算出任意一点的函数值．因而对这个 $f(x,y)$，我们既了解又不了解，所谓不了解，是指函数的具体表达式不知道，想用以前讲的求极值方法则用不上；所谓了解，是指给定一点(x,y)后，总可以通过仪器测出该点的函数值．对这样的一个函数怎么求它的最小值呢？

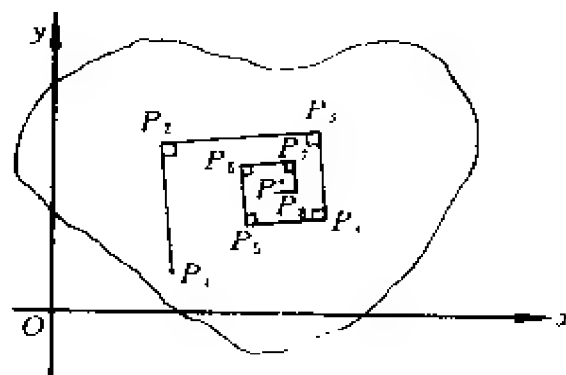


图 198　用最速下降法测太湖最深点

如图 198，设测量船从湖边某一点 P_1 出发，首先要解决的问

题是，船往哪个方向开好呢？当然不能沿着岸边航行，那样永远也找不到最深点. 最自然的想法是应向着湖的中心方向开去，可是太湖大得一眼望不到边，根本无法判断哪个方向指向湖中心. 一种办法是碰运气，盲目地航行，这当然不是一种科学的态度；一种想法是，虽然不能直指湖中心，我们就退而求其次，只求测量船一步步往深处开就行，尽管航行的路线可能会迂回点，但总能逐步达到最深处.

下面我们就按这种想法开始航行. 首先测出 $P_1(x_1,y_1)$ 点和它邻近两点 $P_x(x_1+\Delta x,y_1)$，$P_y(x_1,y_1+\Delta y)$ 的函数值，利用这三点的值，近似求出 P_1 点的梯度向量

$$\nabla f(P_1)=\left(\frac{f(x_1+\Delta x,y_1)-f(x_1,y_1)}{\Delta x},\frac{f(x_1,y_1+\Delta y)-f(x_1,y_1)}{\Delta y}\right)$$

在 P_1 点局部来看，函数沿 $-\nabla f(P_1)$ 方向下降最快，所以令测量船沿 P_1 点的负梯度方向往前开，一边开，一边每隔一定时间（假定等速前进）测一次湖的深度，若后一点测得的深度比前一点的深，测量船就继续向前开. 直到某一点测得的深度比前一点测得的深度浅时，测量船就退回到前一点，设该点为 $P_2(x_2,y_2)$. 这样，我们就由 P_1 点前进到了 P_2 点.

然后就可如法炮制，近似求出 P_2 点的梯度向量 $\nabla f(P_2)$，测量船沿 $-\nabla f(P_2)$ 方向往前开，再边开边测，一直到沿这个方向上的最低点停下来，设该点为 $P_3(x_3,y_3)$. 再沿 $-\nabla f(P_3)$ 方向往前开，求出 P_4 点，…，若干步后，测量船几乎就在某一点附近转圈. 最后按什么标准结束测量呢？可以利用 P_n 点的梯度绝对值充分小（一般不可能等于零），小于事先指定的误差时即可停止，这时把 P_n 点就认为是最低点 $P^*(x^*,y^*)$（或者利用 P_n，P_{n+1} 之间的距离充分小，小于事先指定的误差即可停止，同样把 P_n 认为就是 P^*）. 由此求出了太湖的最深深度 $f(x^*,y^*)$.

注： 这种以负梯度方向为搜索方向去求多元函数极值的方

法称为最速下降法(梯度法).由于电子计算机的出现,这种方法已付诸实施.但由于本身的缺点(在接近极小点时,由于锯齿现象使下降速度显著变慢),往往在求解过程的前期使用,后期改用其它方法.本例只是通过求太湖最深点形象地介绍其思想,对这方面知识感兴趣的读者,可参看刘宝光著《非线性规划》(北京理工大学出版社,1988)等有关最优化算法的专著.

参考文献: [5],p.138~140.

199、蚂蚁如何逃跑

一块长方形的金属板,四个顶点的坐标分别是(1,1),(5,1)(1,3)和(5,3).在坐标原点处有一个火焰,它使金属板受热.假定板上任意一点处的温度与该点到原点的距离成反比.在(3,2)处有一只蚂蚁,问这只蚂蚁应沿什么方向爬行才能最快到达较凉快的地点?

解: 板上任一点(x,y)处的温度 $T(x,y)=\dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$,$k$ 是一个比例常数.温度变化最骤烈的方向是梯度所指方向.计算

$$\text{grad } T=-\frac{kx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\boldsymbol{i}-\frac{ky}{(x^2+y^2)^{3/2}}\boldsymbol{j}$$

$$\therefore \qquad \text{grad } T(3,2)=-\frac{3k}{13^{3/2}}\boldsymbol{i}-\frac{2k}{13^{3/2}}\boldsymbol{j}$$

它的单位矢量 $\dfrac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i}+\dfrac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}$ 所指的方向是由热变冷变化最骤烈的方向(其反方向则是由冷变热).蚂蚁虽然不懂梯度,但凭它的感觉细胞的反馈信号,它将沿这个方向逃跑.

参考文献: [25],下册,p.244.

$$-(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

其中$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$是消耗气体储备的速率，$-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$则为气体质量的变化率.

从而
$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}-(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0$$

即
$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0$$

$\boldsymbol{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$这一项称为火箭的推进值. 注意 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t<0$，于是推进项与喷射气体的速度 $\vec{u}$ 方向相反.

当 $\boldsymbol{u}(t)\equiv\boldsymbol{u}_0$ 时，

$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\boldsymbol{u}_0}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$，积分得

$$\boldsymbol{v}(t)-\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{u}_0\int_0^t\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\boldsymbol{u}_0(\ln m(t)-\ln m(0)).$$

即
$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{u}_0\left(\ln\frac{m(t)}{m_0}\right)$$

燃料耗尽时，火箭的速度为

$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{u}_0\ln\frac{m_0-m_1}{m_0}$$

思考题： 一个重 1000kg 的火箭携带 2000kg 的燃料在空中静止不动，现在它的发动机起动，并且其喷射速度为 0.7km/s，试问当它的所有燃料耗尽时，速率是多少？(2768km/h)

参考文献： [1]，下册，p.177～180.

202、第一宇宙速度

一颗人造地球卫星具有多大速率时，才能环绕地球运行，而不再落回地面？

$$-(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

其中$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$是消耗气体储备的速率，$-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$则为气体质量的变化率.

从而
$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}-(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0$$

即
$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0$$

$\boldsymbol{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$这一项称为火箭的推进值. 注意 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t<0$，于是推进项与喷射气体的速度 $\vec{u}$ 方向相反.

当 $\boldsymbol{u}(t)\equiv\boldsymbol{u}_0$ 时，

$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\boldsymbol{u}_0}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$，积分得

$$\boldsymbol{v}(t)-\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{u}_0\int_0^t\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\boldsymbol{u}_0(\ln m(t)-\ln m(0)).$$

即
$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{u}_0(\ln\frac{m(t)}{m_0})$$

燃料耗尽时，火箭的速度为

$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{u}_0\ln\frac{m_0-m_1}{m_0}$$

思考题： 一个重 1000kg 的火箭携带 2000kg 的燃料在空中静止不动，现在它的发动机起动，并且其喷射速度为 0.7km/s，试问当它的所有燃料耗尽时，速率是多少？(2768km/h)

参考文献： [1]，下册，p.177～180.

202、第一宇宙速度

一颗人造地球卫星具有多大速率时，才能环绕地球运行，而不再落回地面？

$$-(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

其中$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$是消耗气体储备的速率，$-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$则为气体质量的变化率.

从而
$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}-(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0$$

即
$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0$$

$\boldsymbol{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$这一项称为火箭的推进值. 注意 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t<0$，于是推进项与喷射气体的速度 $\vec{u}$ 方向相反.

当 $\boldsymbol{u}(t)\equiv\boldsymbol{u}_0$ 时，

$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\boldsymbol{u}_0}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$，积分得

$$\boldsymbol{v}(t)-\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{u}_0\int_0^t\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\boldsymbol{u}_0(\ln m(t)-\ln m(0)).$$

即
$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{u}_0\left(\ln\frac{m(t)}{m_0}\right)$$

燃料耗尽时，火箭的速度为

$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{u}_0\ln\frac{m_0-m_1}{m_0}$$

思考题： 一个重 1000kg 的火箭携带 2000kg 的燃料在空中静止不动，现在它的发动机起动，并且其喷射速度为 0.7km/s，试问当它的所有燃料耗尽时，速率是多少？(2768km/h)

参考文献： [1]，下册，p.177～180.

202、第一宇宙速度

一颗人造地球卫星具有多大速率时，才能环绕地球运行，而不再落回地面？

解： 以 δ 表示地球的半径，$\delta \approx 6378$ 公里，设卫星质量为

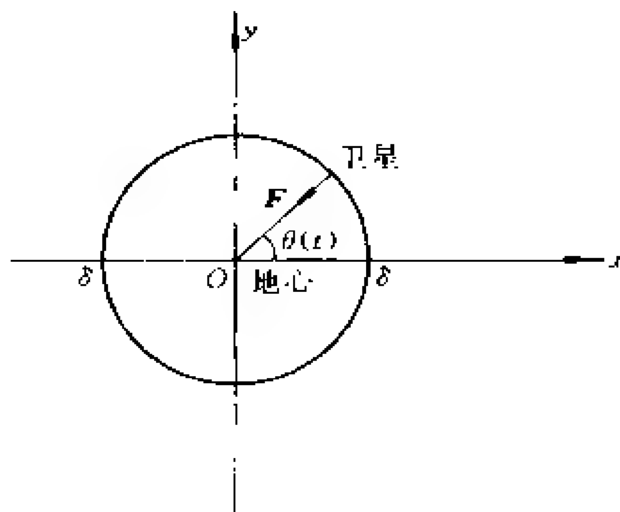


图 202 卫星环绕地球运行

m，以速率 v_0 环绕地球运行，轨迹如图 202，由此产生的离心力和地心引力平衡，从而不再落回地面．此时卫星仅受的外力为重力 $\boldsymbol{F}$，$|\boldsymbol{F}| = mg$，方向指向地心．

设卫星的运动方程为 $\boldsymbol{f}(t) = \delta\cos(\theta(t))\boldsymbol{i} + \delta\sin(\theta(t))\boldsymbol{j}$

则 $\boldsymbol{v}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}t}$，加速度 $\boldsymbol{a}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

由牛顿定律知，$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}(t) = m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

从而
$$mg = |\boldsymbol{F}| = \left|m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right| = m\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|$$

下面求 $\boldsymbol{f}(t)$：设 $s(t)$ 为时刻 t 卫星走过的弧长，

则 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_0$，解得　$s(t) = v_0 t$，

而
$$\theta(t) = \frac{s(t)}{\delta} = \frac{v_0 t}{\delta}$$

故　$\boldsymbol{f}(t) = \delta\cos\left(\dfrac{v_0 t}{\delta}\right)\boldsymbol{i} + \delta\sin\left(\dfrac{v_0 t}{\delta}\right)\boldsymbol{j}$

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=-v_0\sin\left(\frac{v_0t}{\delta}\right)\boldsymbol{i}+v_0\cos\left(\frac{v_0t}{\delta}\right)\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\frac{v_0^2}{\delta}\cos\left(\frac{v_0t}{\delta}\right)\boldsymbol{i}-\frac{v_0^2}{\delta}\sin\left(\frac{v_0t}{\delta}\right)\boldsymbol{j}$$

则

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{v_0^2}{\delta}$$

从而

$$mg=m\frac{v_0^2}{\delta}$$

故

$$v_0=\sqrt{g\delta}=\sqrt{9.81\times6378\times10^3}=7910\ \mathrm{m/s}$$
$$\approx7.9\ \mathrm{km/s}$$

v_0 的这个值通常被称为第一宇宙速度，或环绕速度，当物体具有7.9km/s的速度时，就和地心引力平衡，环绕地球运行，不再落回地面.

203、炮弹在空中的运行问题

一门炮以600米/秒的初始速度射出一发炮弹，此时，炮口向上倾斜30°角.

(*a*) 求 $t\geqslant0$ 时的位置向量.

(*b*) 炮弹在空气中停留了多长时间?

(*c*) 这发炮弹飞行了多远?

(*d*) 这发炮弹达到多高?

(*e*) 从炮身到炮弹的着陆点有多远?

(*f*) 这发炮弹着地时的速率和速度向量是多少? 这里我们假设炮口放置在地平面上并且忽略空气阻力.

解： (*a*) 刻划一个物体在一垂直平面上运动的位置向量方程为

$$f(t)=-\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{v}_0t+\boldsymbol{f}_0$$

其中$\boldsymbol{v}_0$为初始速度，$\boldsymbol{f}_0$为初始位置，g为重力加速度．而这里，$\boldsymbol{v}_0=300\sqrt{3}\boldsymbol{i}+300\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{f}_0=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}$ 故

$$f(t)=-\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j}+300\sqrt{3}t\boldsymbol{i}+300t\boldsymbol{j}$$

$$=300\sqrt{3}t\boldsymbol{i}+(300t-\frac{1}{2}gt^2)\boldsymbol{j}$$

(b) 当垂直分量是零时炮弹落地，即当

$300t-\frac{1}{2}gt^2=0$ 时落地，由此得 $t=600/g$ 秒．

(c) 总行程为

$S=\int_0^{600/g}\left(\frac{ds}{dt}\right)dt$，其中 $S(t)$表示 t 时刻炮弹所走路程．而

$$\frac{ds}{dt}=v(t)=|\boldsymbol{v}(t)|=|\boldsymbol{f}'(t)|$$

$$=|300\sqrt{3}\boldsymbol{i}+(300-gt)\boldsymbol{j}|$$

$$=\sqrt{270\ 000+(300-gt)^2}$$

于是 $S=\int_0^{600/g}\sqrt{270\ 000+(300-gt^2)}\,dt$

令 $300-gt=\sqrt{270\ 000}\,\mathrm{tg}\,\theta=300\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\theta$， 则 $-g\,dt=300\sqrt{3}\sec^2\theta d\theta$，$dt=(-300\sqrt{3}/g)\sec^2\theta d\theta$．此外，$\sqrt{270\ 000+(300-gt^2)}=300\sqrt{3}\sec\theta$．

当 $t=0$ 时，$\theta=\frac{\pi}{6}$；当 $t=600/g$ 时，$\theta=-\frac{\pi}{6}$，于是

$$S=-\frac{1}{g}\int_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}}300\sqrt{3}(300\sqrt{3})\sec^3\theta d\theta$$

$$=\frac{270\ 000}{g}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\sec^3\theta d\theta=\frac{540\ 000}{g}\int_0^{\pi/6}\sec^3\theta d\theta$$

$$=\frac{270\,000}{g}(\ln|\sec\theta+\mathrm{tg}\,\theta|+\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{270\,000}{g}\left(\ln\sqrt{3}+\frac{2}{3}\right)\approx 33.467(\mathrm{km})$$

(d) 当 $dy/dt=0$ 时达到最大高度，即当 $300-gt=0$，即当 $t=300/g$ 时达到最大高度，$y_{max}=45\,000/g\approx 4587.2\mathrm{m}$.

(e) 在 $600/g$ 秒里 f 的 x 分量从 0 增加到 $(300\sqrt{3})\times(600/g)\approx 31,780.7\mathrm{m}\approx 31.78\mathrm{km}$

(f) $v\left(\frac{600}{g}\right)=\sqrt{270\,000+\left(300-g\times\frac{600}{g}\right)^2}$

$=\sqrt{270\,000+90\,000}$

$=600$ 米/秒速度向量 $\boldsymbol{v}\left(\frac{600}{g}\right)=300\sqrt{3}\boldsymbol{i}+(-300)\boldsymbol{j}$

参考文献： [1]，下册，p. 176～177.

204、沿什么方向电压变化最快

设某金属板上电压的分布为

$$V=50-x^2-4y^2$$

(a) 在点(1，−2)处，沿哪个方向电压升高得最快？

(b) 沿哪个方向下降得最快？

(c) 上升或下降的速率各是多少？

(d) 沿什么方向电压变化得最慢？

解： 在关于函数的梯度的讨论中，我们知道，函数沿其梯度的方向上升最快，沿与梯度相反的方向下降最快，沿与梯度垂直的方向变化最慢．由此，我们先求 V 的梯度．

$$\mathrm{grad}\,\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}=-2x\boldsymbol{i}-8y\boldsymbol{j}$$

在点(1，−2)处，$\mathrm{grad}\boldsymbol{v}=-2\boldsymbol{i}+16\boldsymbol{j}$，所以，在点(1，−2)处，有

(a) 沿着 $-2\boldsymbol{i}+16\boldsymbol{j}$ 的方向电压升高得最快.

(b) 沿着 $2\boldsymbol{i}-16\boldsymbol{j}$ 的方向电压下降得最快.

(c) 上升或下降的速率都是 $\sqrt{2^2+16^2}=\sqrt{260}$.

(d) 因为单位向量 $\frac{1}{\sqrt{260}}(16\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})$ 垂直于 grad V,所以沿此方向,或沿此相反的方向电压变化得最慢.

思考题: 条件如题,求出一条路径,使质点从(1, −2)出发沿着这条路径运动时,电压变化得最快.

解: 显然,所求路径方向必须与梯度方向一致. 若设质点运动的路径是 $\boldsymbol{f}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}$,则它的方向是 $\boldsymbol{f}'(t)=x'(t)\boldsymbol{i}+y'(t)\boldsymbol{j}$. 为了使这个方向与 grad $V=-2x\boldsymbol{i}-8y\boldsymbol{j}$ 的方向相同,必须有

$$x'(t)=-2x(t),\ y'(t)=-8y(t).$$

则

$$x(t)=c_1e^{-2t},\ y(t)=c_2e^{-8t}.$$

由于 $x(0)=1, y(0)=-2$,所以

$$x(t)=e^{-2t},\ y(t)=-2e^{-8t}$$

最后由 $e^{-8t}=(e^{-2t})^4$ 使得出质点运动的路径为

$$y=-2x^4$$

参考文献: [1],下册,p.294~295.

205、星形线的一种形成方式

一轴承,剖面如图. 小圆表示滚珠,半径为 a. 大圆表示轴瓦,半径 $R=4a$. 在理想状态下,大圆固定而小圆在大圆内相切滚动,试用矢量代数方法确定小圆上一点 M 的轨迹.

解: 先建立坐标系,再依题进行研究. 如图 205,设开始时点 M 在点 A 处,取大圆心为原点,OA 方向为 x 轴正向. 则依题意有

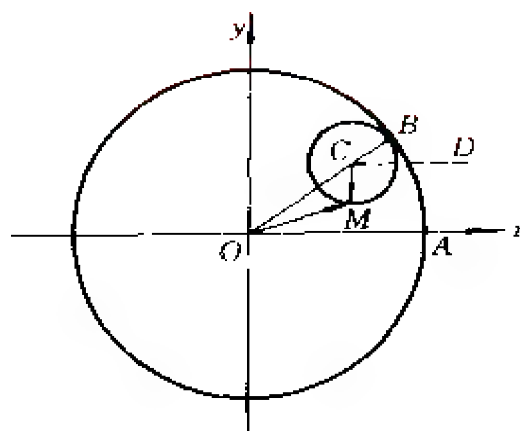


图 205　星形线的形成

$$\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{BA}$$

从而，由上式及圆弧的弧长公式有

$$a \cdot \angle BCM = R \cdot \theta$$

其中 $\theta = \angle BOA$，$R = 4a$. 故 $\angle BCM = 4\theta$. 又作 $CD // x$ 轴，则 $\angle BCD = \angle BOA = \theta$，从而

$$\angle DCM = \angle BCM - \angle BCD = 4\theta - \theta = 3\theta$$

下面根据矢量代数方法，矢量按基本矢量的分解式有

$$\overrightarrow{OC} = 3a\cos\theta\boldsymbol{i} + 3a\sin\theta\boldsymbol{j}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} &= a\cos(-3\theta)\boldsymbol{i} + a\sin(-3\theta)\boldsymbol{j} \\ &= a\cos 3\theta\boldsymbol{i} - a\sin 3\theta\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

由矢量加法并用三角公式 $3\cos\theta + \cos 3\theta = 4\cos^3\theta$，$3\sin\theta - \sin 3\theta = 4\sin^3\theta$ 得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} \\ &= (3a\cos\theta + a\cos 3\theta)\boldsymbol{i} + (3a\sin\theta - a\sin 3\theta)\boldsymbol{j} \\ &= 4a\cos^3\theta\boldsymbol{i} + 4a\sin^3\theta\boldsymbol{j} \\ &= R\cos^3\theta\boldsymbol{i} + R\sin^3\theta\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

此即 M 点轨迹的矢量方程,其参数方程为

$$x = R\cos^3\theta, y = R\sin^3\theta$$

可见,M 点的轨迹是星形线.

思考题: 试求一条曲线,使该曲线上任一点处的切线夹在 x 轴 y 轴之间的长度为 1.(答案:星形线 $x=\cos^3\theta, y=\sin^3\theta$)

参考文献: [60],p.4~5;[67],p.133~136.

主要参考文献

[1] Grossmon S I. 微积分及其应用. 上、下册. 周性伟等译. 天津:天津科学技术出版社,1988

[2] Lax P, Burstein S, Lax A. 微积分及其应用与计算:第1卷,第1册. 唐述钊等译. 北京:人民教育出版社,1980

[3] 格林斯潘 H P, 班奈 D J. 微积分——应用数学引论:上册. 王建华等译. 北京:人民教育出版社,1979

[4] 奎奈 J. 高等数学基本教程 2——常用函数. 唐兆亮. 郭书春译. 北京:高等教育出版社,1988

[5] 方企勤. 多元函数微积分. 上海:上海科学技术出版社,1980

[6] 北京大学数学力学系高等数学教材编写组. 常微分方程与无穷级数. 北京:人民教育出版社,1978

[7] 赵树嫄主编. 经济应用数学基础(一)——微积分. 修订版. 北京:中国人民大学出版社,1993

[8] 刘应辉主编. 经济应用数学:上册. 北京:中国财政经济出版社,1991

[9] 马 J·廷布雷尔. 经济数学. 姚孟臣、刘勇等译. 北京:北京大学出版社,1972

[10] 陆乃超,袁小明. 世界数学名题选. 上海:上海教育出版社,1989

[11] 华罗庚. 谈谈与蜂房结构有关的数学问题. 北京:北京出版社,1979

[12] 杨迅文. 数列求和方法拾缀. 福州:福建人民出版社,1982

[13] Richard Dalven 原著. 微积分在物理学中的应用. 徐志东,袁玉辉编译. 成都:西南交通大学出版社,1991

[14] 石殿璋. 微积分题解上册. 西安:陕西科学技术出版社,1982

[15] 少年儿童出版社. 十万个为什么:天文 1,数学 1,物理 2. 北京:少年儿童出版社,1983

[16] 邵士敏主编. 高等数学讲义:上册. 北京:中央广播电视大学出版社,1983

[17] 陈开周. 最优化计算方法. 西安:西北电讯工程学院出版社,1985

[18] 金福临,阮炯,黄振勋.应用常微分方程.上海:复旦大学出版社,1991
[19] 许志成,赵迁贵.应用定积分元素法求旋转体体积.工科数学,1984(4)
[20] 海因里希·德里.100个著名初等数学问题——历史和解.上海:上海科学技术出版社,1982
[21] 谌安琦.科技工程中的数学模型.北京:中国铁道出版社,1988
[22] 吉林大学数学系.数学分析:下册.北京:人民教育出版社,1978
[23] Larson R E. & Hostetler R P.应用微积分.梁基岩译.台湾、北京:晓园出版社、世界图书出版公司北京分公司,1992
[24] 税制改革文件汇编.北京市税务局海淀区分局.1994
[25] Ellis R、& Gulick D. 微积分.章平译.南京:江苏科学技术出版社,1992
[26] 刘正根,丁京禹、刘丽,朱南.微积分.成都:西南财金大学出版社,1988
[27] G. B. Thomas J R. & R. L. Finney 微积分与解析几何.骆传忠,骆传孝译.台湾、北京:晓园出版社,世界图书出版公司北京分公司,1993
[28] Braun M.微分方程及其应用.张鸿林译.北京:人民教育出版社,1980
[29] Lucas W F. 微分方程模型.朱煜民,周宇虹译.长沙:国防科技大学出版社,1988
[30] Kline M. 古今数学思想:第二册.北京大学数学系数学史翻译组译.上海:上海科学技术出版社,1979
[31] Earl W. Swokowski. Calculus With Analytic Geometry. Second alternate edition. PWS Kent Publishing Company, 1987
[32] Л. M. 巴士涅尔,M, E. 波津.化工数学.邬行彦等译.北京:高等教育出版社,1960
[33] 河村祐治,中丸八朗,今石宣之.化工数学.张克,孙登文译.北京:化学工业出版社,1980
[34] H. 毕莱等.微分方程及其应用.徐伟成,乐茂生,晓燕译,上海:上海科学技术出版社,1960.
[35] R.罗德著.高等数学:第三卷.秦裕瑗译.北京:人民教育出版社,1978
[36] 方积乾主编.微积分初步与生物医学应用.北京:北京医科大学,中国协和医科大学联合出版社,1990.
[37] 陈义华.数学模型.重庆:重庆大学出版社,1995.
[38] Thomas Dick, John & Jane. buy a house, Consortium—The Newsletter

of the Consortium for Mathemat ics and its Applications (COMAP). no. 46 (1993)

[39] 周怀梧.数理医药学.上海:上海科学技术出版社,1983

[40] 方积乾主编.高等数学.北京:人民卫生出版社,1992

[41] 杨纪坷等编译.生物数学概论.北京:科学出版社,1982

[42] 梁淑娟,苏曾遂编.微积分在力学中的应用.北京:人民教育出版社,1980

[43] B.И.斯米尔诺夫著.高等数学教程:第二卷第二分册,孙念增译.北京:人民教育出版社,1959

[44] 费定晖,周学圣编.吉米多维奇数学分析习题集题解.第1版.济南:山东科技出版社,1980

[45] James W. Burgmeier, et al. Calculus with Applications. McGraw—Hill Publishing Company,1990

[46] Rodolfo De Sapio. Calculus for the life Sciences. N. H. Freeman and Company. 1976

[47] Larry. J. Goldstein, et al. Calculus and its Applications third edition. Prentice-Hall, Inc, 1984

[48] D.N. Burghes. Applying Mathematics: a course in mathematical modelling. Ellis Horwood Limited, 1982

[49] Jagdish C. Arya et al. Mathematics for the Biological Sciences. Prentice-Hall, Inc, 1979

[50] N.J. Delillo. Advanced Calculus Applications. Macmillan Pubishing Ca, Inc. 1982

[51] Laurence D. Hoffmann. Applied Calculus. McGraw-Hill Book Company, 1983.

[52] Dane R. Camp. A Fractal Excursion, Mathematics Teacher, 1991,84(4): 265~275

[53] Stanley J. Farlow and Gray M. Haggard. Calculus and its Applications. New York: McGraw-Hill Publishing Company, 1990

[54] J. D. Logan. Applid Mathematics—A contemporary Approach. New York: John wiley & sons, 1987.

[55] 叶其孝,姜启源编.Selected OMAP modules in Undergradnate Mathe-

metics And its appli cation. 北京:北京市数学会,1993
[56] 韩庆书主编.高等数学学习指导.第1版.北京:北京科学技术出版社,1991
[57] 欧维义,陈维钧,金德俊.高等数学:第1册.长春,吉林大学出版社,1986
[58] A.J.华盛顿著.应用微积分:上册.郭燮昌译.台北:台湾东华书局,1972
[59] 刘裔宏等译.普特南数学竞赛.长沙:湖南科学技术出版社,1983
[60] 谢树艺.矢量分析与场论学习指导书.北京:人民教育出版社,1979
[61] 曹绳武等.高等数学习题集.大连:大连理工大学出版社,1987
[62] 邓建中,葛仁杰,程正兴.计算方法.西安:西安交通大学出版社,1985
[63] 梁昆淼.数学物理方法.北京:人民教育出版社,1979
[64] 郭敦仁.数学物理方法.北京:人民教育出版社,1978
[65] 姜启源.数学模型.第2版.北京:高等教育出版社,1993
[66] 上海交通大学应用数学系编.高等数学试题及解题汇编.上海:上海交大出版社
[67] H.P.格林斯潘.D.J.班奈著.微积分:下册,王建华等译.北京:人民教育出版社,1981
[68] 项武义.微积分大意.北京:人民教育出版社,1978
[69] 漆安慎,杜婵英.力学基础.北京:高等教育出版社,1982
[70] 工科数学.1986(1)
[71] 曾庆黎.弓形区域绕直线 $y=kx$ 旋转所生成立体的体积.数学通报,1994(9)

二　随机变量及其概率分布

1. 随机变量和分布函数

设随机试验的样本空间为 Ω, Ω 上的实值函数 X: $\Omega \to R$ 称作随机变量，即对每一个可能的试验结果（样本点）$\omega \in \Omega$，都有惟一的实数 $X(\omega)$ 与之对应，则称 $X(\omega)$ 是一个随机变量，简记作 X.

函数

$$F(x)=P\{X \leqslant x\}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

称作随机变量 X 的分布函数.

分布函数具有下述性质:

(1) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1, \quad -\infty < x < +\infty$;

(2) $F(x)$ 是非减的，即若 $x_1 < x_2$，则 $F(x_1) \leqslant F(x_2)$;

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)=0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)=1$;

(4) $F(x)$ 是右连续的，即对于每一个实数 a,

$$\lim_{x \to a^+} F(x)=F(a);$$

(5) X 落在区间 $(a, b]$ 内的概率

$$P\{a < X \leqslant b\}=F(b)-F(a);$$

(6) X 落在点 a 处的概率

$$P\{X=a\}=F(a)-F(a-0).$$

2. 离散型随机变量及其分布律

如果随机变量 X 只能取到有穷个值或可数个值，则称 X 是离散型随机变量.

设 X 可能取到的值为 $x_1, x_2, \cdots$，这里 $x_1, x_2, \cdots$ 可以是有穷个，也可以是可数个，称

$$p_k=P\{X=x_k\}, \qquad k=1, 2, \cdots$$

为 X 的分布律.

离散型随机变量具有下述性质:

(1) $p_k \geqslant 0, \quad k=1, 2, \cdots$

(2) $\sum\limits_k p_k = 1$, 这里是对所有的 k(有穷个或可数个)求和;

(3) 设 S 是实数集 R 的子集, X 落在 S 内的概率

$$P\{X \in S\} = \sum_{x_k \in S} p_k;$$

(4) 分布函数是阶梯状, 在每一个 x_k 处的跳跃高度为 p_k. 当 X 可能取到有穷个值 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ 时,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1; \\ p_1, & x_1 \leqslant x < x_2; \\ \vdots & \vdots \\ p_1 + \cdots + p_k, & x_k \leqslant x < x_{k+1}; \\ \vdots & \vdots \\ 1, & x_n \leqslant x. \end{cases}$$

当 X 可能取到可数个值 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$ 时,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1; \\ p_1, & x_1 \leqslant x < x_2; \\ \vdots & \vdots \\ p_1 + \cdots + p_k, & x_k \leqslant x < x_{k+1}; \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

3. 连续型随机变量及其概率密度

如果存在非负可积函数 $f(x)$, 使得随机变量 X 的分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t, \quad -\infty < x < +\infty,$$

则称 X 是连续型随机变量, 称 $f(x)$ 是 X 的概率密度函数, 简称作

概率密度或密度.

连续型随机变量具有下述性质:

(1) $f(x) \geqslant 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x = 1$;

(3) 对任意的 $a<b$,

$$P\{a<X<b\}=P\{a<X\leqslant b\}=P\{a\leqslant X<b\}=P\{a\leqslant X\leqslant b\}$$
$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x;$$

(4) 分布函数 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续;

(5) 若 $f(x)$ 在 x 处连续,则 $F'(x)=f(x)$.

4. 常见的概率分布

(1) 0-1 分布

分布律为

x	0	1
$P\{X=x\}$	$1-p$	p

其中 $0<p<1$.

当随机试验只有两种可能的结果时,可以用服从 0-1 分布的随机变量来描述.

(2) 二项分布 $B(n, p)$

分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, \quad k=0, 1, \cdots, n,$$

其中 n 是正整数,$0<p<1$.

设伯努利概型在每次试验中事件 A 发生的概率为 p,记 X 为 n 次试验中 A 发生的次数,则 X 服从 $B(n, p)$.

(3) 泊松(Poisson)分布 $\mathscr{P}(\lambda)$

分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\qquad k=0,\ 1,\cdots,$$

其中 $\lambda>0$.

泊松分布可作为描述大量试验中稀有事件出现次数的概率分布的数学模型.例如,在规定长度的时间间隔内,电话总机接到用户呼唤的次数、在车站候车的旅客数、原子蜕变放射出的粒子数、数字通讯中的误码数以及大批量产品中不合格品数等都服从泊松分布.

(4) 超几何分布

分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\qquad k=\max\{0,\ n+M-N\},\cdots,\ \min\{M,\ n\},$$

其中 $M,\ N,\ n$ 为正整数且 $M\leqslant N,\ n\leqslant N$.

设 N 件产品中有 M 件次品,从中任取 n 件,记取出的 n 件产品中的次品数为 X,则 X 服从超几何分布.

(5) 均匀分布

区间$[a,\ b]$上的均匀分布,其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(6) 指数分布

密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$. 它的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

(7) 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$

密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

其中 μ, σ 为常数，且 $\sigma>0$.

$\mu=0$, $\sigma=1$ 的正态分布 $N(0, 1)$ 称作标准正态分布，其密度函数记作 $\phi(x)$, 即

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty.$$ 见图 3-4.

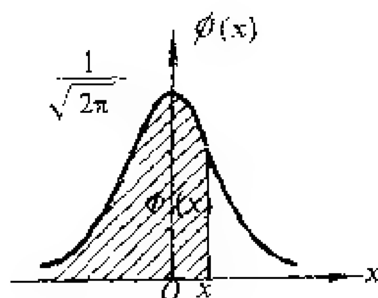


图 3-4

它的分布函数记作 $\Phi(x)$, 即

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t,\quad -\infty<x<+\infty.$$

$\phi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 具有下述性质:

(1) $\phi(x)$ 是偶函数，即 $\phi(-x)=\phi(x)$;

(2) 当 $x=0$ 时，$\phi(x)$ 取到最大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$;

(3) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=1$;

(4) $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

正态分布具有下述性质:

(1) 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, a, b 是常数且 $a \neq 0$, 则

$$aX+b \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2).$$

特别地,

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

(2) 设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则

$$X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2).$$

(3) 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 X 的分布函数

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

对任意的 $a<b$,

$$P\{a<X<b\}=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

根据性质(3), 可以利用标准正态分布的分布函数表给出任意正态分布的分布函数值及有关的概率.

5. 随机变量函数的分布

设随机变量 X 和实函数 $g(x)$, 随机变量的函数 $Y=g(X)$ 也是随机变量.

当 X 为离散型随机变量时, 设 X 的可能取值为 $x_1, x_2, \cdots$, 则 Y 也是离散型随机变量, 可能取到的值为 $g(x_1), g(x_2), \cdots$. 在 $g(x_1), g(x_2), \cdots$ 中可能有相同的值. 为了得到 Y 的分布律, 应将相同的值合并, 对应的概率相加.

例如, 设 X 的分布律为

x	-1	0	1
$P\{X=x\}$	0.1	0.4	0.5

求 $Y=X^2+1$ 的分布律.

x	-1	0	1
$y=x^2+1$	2	1	2
	0.1	0.4	0.5

注意：到当 $x=-1$ 和 $x=1$ 时对应的 $y=2$，应将其合并，故 Y 的分布律为

y	1	2
$P\{Y=y\}$	0.4	0.6

当 X 为连续型随机变量时，通常可先由 X 的密度函数 $f(x)$ 计算出 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P\{g(X)\leqslant y\}=\int_{g(x)\leqslant y} f(x)\mathrm{d}x,$$

再对 $F_Y(y)$ 求导得到 Y 的密度函数.

设 X 的密度函数为 $f(x)$，$g(x)$ 的导数 $g'(x)$ 连续且恒不等于 0，则 $Y=g(X)$ 的密度函数

$$f_Y(y)=\begin{cases} f[h(y)]|h'(y)|, & a<y<b, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数，(a, b) 是 $h(y)$ 的定义域.

特别地，$Y=aX+b\ (a\neq 0)$ 的密度函数为

$$f_Y(y)=\frac{1}{|a|}f\left(\frac{y-b}{a}\right), \qquad -\infty<y<+\infty.$$

例 1　某汽车经过的路上有 4 个交叉路口，设在每个交叉路口碰到红灯的概率都是 p，且各路口的红绿灯是相互独立的. 求该汽车停止前进时，已通过的交叉路口个数的分布律.

解　设汽车停止前进时，已经过的交叉路口个数为 X，则 X 为离散型随机变量，且可能取值为 0，1，2，3，4. 当 $k=0$，1，2，3 时，事件 $\{X=k\}$ 表示它经过的前 k 个路口都是绿灯，而第 $k+1$ 个路口为红灯. 由独立性可知，$P\{X=k\}=pq^k$. 而事件 $\{X=4\}$ 表示所有 4 个

路口都是绿灯，于是 $P\{X=4\}=q^4$，这里 $q=1-p$. 于是，X 的分布律如下表所示.

k	0	1	2	3	4
p_k	p	pq	pq^2	pq^3	q^4

例 2　设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}A\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：

(1) 常数 A;

(2) X 的分布函数;

(3) $P\left\{|X|\leqslant\frac{1}{2}\right\}$.

解　(1) 由密度函数的性质，可定常数 A.

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=A\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{令 } x=\sin t} A\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\ \mathrm{d}t$$

$$=\frac{A}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{A}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi A}{2},$$

得

$$A=\frac{2}{\pi}.$$

(2) $F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t.$

当 $x<-1$ 时，$F(x)=0$；

当 $-1\leqslant x<1$ 时，

$$F(x)=\int_{-1}^{x}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\text{令 } t=\sin u}\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin x}\cos^2 u\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[u+\frac{1}{2}\sin 2u\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin x}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\arcsin x+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 2(\arcsin x)\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\arcsin x+\frac{\pi}{2}+x\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$=\frac{x}{\pi}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x+\frac{1}{2}.$$

当 $x\geqslant 1$ 时，$F(x)=1$. 于是，

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{x}{\pi}\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin x+\dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

(3) 既可以用密度函数，也可以用分布函数求 $P\left\{|X|\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$，既然已求出了分布函数，当然用分布函数求较为方便.

$$P\left\{|X|\leqslant\frac{1}{2}\right\}=P\left\{-\frac{1}{2}\leqslant X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$$

$$=P\left\{-\frac{1}{2}<X\leqslant\frac{1}{2}\right\}\quad(\text{利用连续型随机变量的性质})$$

$$=F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{-1}{2\pi}\sqrt{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{\pi}\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}+\frac{1}{3}.$$

例 3　设随机变量 Y 服从 $(0,\ 5)$ 上的均匀分布，求方程

$$4x^2+4Yx+(Y+2)=0$$

有实根的概率.

解　本题所给关于 x 的二次方程中，一次项的系数和常数项均含有随机变量 Y，Y 服从 $(0,\ 5)$ 上的均匀分布，其密度函数为

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}, & 0<t<5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

二次方程有实根当且仅当判别式

$$16Y^2-16(Y+2)\geqslant 0,$$

即

$$(Y+1)(Y-2)\geqslant 0.$$

解得，$Y\leqslant -1$ 或 $Y\geqslant 2$，所以方程有实根的概率为

$$P\{Y\leqslant -1\}+P\{Y\geqslant 2\}$$

$$=0+\int_2^5 \frac{1}{5}\,\mathrm{d}t=\frac{3}{5}\ .$$

例 4　由某机器生产的螺栓的长度(cm)服从参数 $\mu=10.05$，$\sigma=0.06$ 的正态分布，规定长度在范围 10.05 ± 0.12 内为合格品，求螺栓的次品率.

解　设螺栓的长度为 X(cm)，$X\sim N(10.05,\ 0.06^2)$，则 $\dfrac{X-10.05}{0.06}\sim N(0,\ 1)$. $|X-10.05|\leqslant 0.12$ 为合格，于是次品率为

$$\begin{aligned}p&=P\{|X-10.05|>0.12\}\\&=1-P\{|X-10.05|\leqslant 0.12\}\\&=1-P\left\{\left|\frac{X-10.05}{0.06}\right|\leqslant 2\right\}\\&=1-(\Phi(2)-\Phi(-2))\\&=1-(\Phi(2)-1+\Phi(2))\\&=2(1-\Phi(2))\end{aligned}$$

查标准正态分布函数表得 $\Phi(2)=0.97725$，所以次品率

$$p=2(1-0.97725)=0.0455.$$

例 5　设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}ax+b, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

又已知，$P\left\{X<\frac{1}{3}\right\}=P\left\{X>\frac{1}{3}\right\}$，求常数 a 和 b.

解　由密度函数的性质有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}(ax+b)\,\mathrm{d}x=\frac{a}{2}+b.$$

由已知条件　$P\left\{X<\frac{1}{3}\right\}=P\left\{X>\frac{1}{3}\right\}$，有

$$P\left\{X<\frac{1}{3}\right\}=1-P\left\{X\geqslant\frac{1}{3}\right\}=1-P\left\{X>\frac{1}{3}\right\}$$

$$=1-P\left\{X<\frac{1}{3}\right\},$$

整理后得到

$$P\left\{X<\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{2},$$

而

$$P\left\{X<\frac{1}{3}\right\}=\int_{0}^{\frac{1}{3}}(ax+b)\,\mathrm{d}x=\frac{a}{18}+\frac{1}{3}b.$$

于是，得方程组

$$\begin{cases}\frac{1}{2}a+b=1;\\ \frac{1}{18}a+\frac{1}{3}b=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

解得，$a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{7}{4}$.

例 6　设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $Y=e^X$ 的分布密度.

解　Y 的分布函数　$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}$

当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=0$.

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{e^X\leqslant y\}$

$$=P\{X\leqslant \ln y\} \qquad (e^x \text{ 严格单调增加})$$

$$=\int_0^{\ln y} f_X(x)\,dx.$$

由含参变数积分求导公式可得 Y 的密度函数($y>0$ 时)

$$f_Y(y)=f_X(\ln y)\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma y}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln y-\mu)^2},$$

所以，

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln y-\mu)^2}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

例 7　设 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{2^k}$，$k=1, 2, \cdots$，求 $Y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}X\right)$ 的概率分布.

解　由于 X 取正整数值，所以 $\dfrac{\pi}{2}X$ 取值为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的正整数倍，因而 $Y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}X\right)$ 只能取 $-1, 0, 1$ 三个值.

$Y=-1$ 当且仅当 $X=3+4i$，　$i=0, 1, 2, \cdots$，于是

$$P\{Y=-1\}=\sum_{i=0}^{\infty}P\{X=3+4i\}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3+4i}}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{16}}=\frac{2}{15}$$

$Y=0$ 当且仅当 $X=2i$，　$i=1, 2, \cdots$，于是

$$P\{Y=0\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=2i\}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2i}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

$Y=1$ 当且仅当 $X=1+4i$, $i=0, 1, 2, \cdots$, 于是

$$P\{Y=1\}=\sum_{i=0}^{\infty}P\{X=1+4i\}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^{1+4i}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{16}}=\frac{8}{15}$$

综上所述，Y 的分布律如下表所示.

Y	-1	0	1
p_k	$\frac{2}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{8}{15}$

例 8　设每人每次打电话的时间（分钟）服从 $\lambda=1$ 的指数分布，试求在 800 人次电话中有 3 次或 3 次以上超过 6 分钟的概率.

解　设每人打电话的时间为 X, 则 X 服从 $\lambda=1$ 的指数分布，其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

于是，每次超过 6 分钟的概率

$$p=P\{X>6\}=\int_{6}^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-6}\approx 0.0025$$

设 800 人次中超过 6 分钟的次数为 Y, 则 $Y\sim B(800, p)$, 其中 $p=0.0025$. 由于 $n=800$ 很大，$p=0.0025$ 很小，因而可以用泊松定理计算所求概率，$\lambda'=np=800\times 0.0025=2$

$$P\{Y\geqslant 3\}=1-P\{Y\leqslant 2\}=1-\sum_{k=0}^{2}\frac{\lambda'^k}{k!}e^{-\lambda'}$$

$$=1-\left(e^{-\lambda'}+\frac{\lambda'}{1!}e^{-\lambda'}+\frac{\lambda'^2}{2!}e^{-\lambda'}\right)$$

$$=1-e^{-2}\left(1+2+\frac{2^2}{2}\right)\approx 1-0.135\times 5\doteq 0.325$$

习　题　二

1. 设某射手每次射击击中目标的概率为 0.8，现在连续射 30 次，试求击中目标的次数 X 的分布律.

2. 将一颗骰子连掷两次，求所得点数之和的分布律.

3. 抛掷一枚硬币，直到出现“正面朝上”时为止，求抛掷次数的分布律.

4. 设随机变量 X 服从泊松分布，且已知 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，求 $P\{X=4\}$.

5. 设有同类型的设备 300 台，各台工作是相互独立的，各台发生故障的概率都是 0.01. 一台设备的故障可由一个工人及时处理. 问至少要配备多少工人，才能保证当设备发生故障时，不能及时维修的概率小于 0.01?

6. 一袋中装有 5 个乒乓球，编号分别为 1, 2, 3, 4, 5. 从中任意地取 3 个，以 X 表示取出的 3 个球中的最大号码，写出 X 的分布律和分布函数.

7. 随机变量的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{C}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求

(1) 常数 C;

(2) X 的分布函数;

(3) X 落入区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 内的概率.

8. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 $\mu=1$, $\sigma^2=0.6^2$, 求:

(1) $P\{X>0\}$;

(2) $P\{0.2<X<1.8\}$.

9. 已知随机变量 X 的分布律如下表所示.

X	-2	-1	0	1	3
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

求 $Y=X^2$ 的分布律.

10. 设 X 服从 $(0, \pi)$ 上的均匀分布, 求 $Y=\sin X$ 的概率密度.

11. 设 $\ln X \sim N(1, 2^2)$, 求 $P\left\{\frac{1}{2}<X<2\right\}$.

12. 测量球的直径并计算球的体积, 设直径的测量值服从 $[a, b]$ 上的均匀分布, 求体积的计算值的概率密度.

13. 点随机地落在以原点为中心, 半径为 R 的圆周上, 并且对弧长是均匀分布的. 求落点的横坐标的概率密度.

14. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} A\cos x, & |x| \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求:

(1) 常数 A;

(2) $P\left\{|\sin X|<\frac{1}{2}\right\}$.

15. 设 X 的分布函数为

$$F(x)=A+B\operatorname{arctg}x, \quad -\infty<x<+\infty.$$

求:

(1) 常数 A 和 B;

(2) X 的密度函数;

(3) $P\{X\leqslant 1\}$.

16. 设随机变量 X 服从 $(0, 1)$ 区间上的均匀分布, 求 $Y=-2\ln X$ 的密度函数.

17. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0<x<2, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

已知 $P\{X\geqslant a\}=\frac{1}{2}$, 求 a.

18. 设随机变量的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1, \\ A(x+1), & -1\leqslant x<0, \\ B(x+1)^2, & 0\leqslant x<1, \\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

已知 X 为连续型随机变量, 求:

(1) 常数 A, B;

(2) X 的密度函数.

19. 某工厂生产的显象管的寿命 X(单位: 小时)服从 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 $\mu=18000$. 若要求显象管的寿命不低于 15000 小时的概率至少为 0.99, 允许 σ 最大为多少?

20. 设 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数. 已知 $F(x)$ 连续且严格单调, 令 $Y=F(X)$, 证明 Y 服从 $(0, 1)$ 区间上的均匀分布.

三　二维随机变量及其概率分布

1. 二维随机变量的联合分布函数和边缘分布函数

设随机试验的样本空间为Ω，X和Y是定义在Ω上的两个随机变量，称向量(X, Y)为二维随机变量.

二元函数

$$F(x, y)=P\{X\leqslant x, Y\leqslant y\}, \qquad -\infty<x, y<+\infty$$

称作(X, Y)的分布函数，或X和Y的联合分布函数.

分量X的概率分布称作(X, Y)关于X的边缘分布.关于X的边缘分布函数为

$$F_X(x)=F(x, +\infty), \qquad -\infty<x<+\infty.$$

分量Y的概率分布称作(X, Y)关于Y的边缘分布.关于Y的边缘分布函数为

$$F_Y(y)=F(+\infty, y), \qquad -\infty<y<+\infty.$$

这里$F(x, +\infty)$　和　$F(+\infty, y)$　分别是$\lim\limits_{y\to+\infty}F(x, y)$和$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x, y)$的简记.

联合分布函数具有下述性质：

(1) $0\leqslant F(x, y)\leqslant 1$.

(2) $F(x, y)$对x和y分别是单调不减的，即对任意的y，若$x_1<x_2$，则$F(x_1, y)\leqslant F(x_2, y)$；对任意的$x$，若$y_1<y_2$，则$F(x, y_1)\leqslant F(x, y_2)$.

(3) $F(x, y)$对x和y分别是右连续的，即对任意x, y，

$$\lim_{u\to x^+}F(u, y)=F(x, y),$$

$$\lim_{v\to y^+}F(x, v)=F(x, y).$$

(4) 对任意的y，$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x, y)=0$；

对任意的 x， $\lim\limits_{y\to-\infty} F(x, y)=0$;

$$\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x, y)=0;$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F(x, y)=1.$$

2\. 二维离散型随机变量

如果二维随机变量 (X, Y) 只能取到有穷对值或可数对值，则称 (X, Y) 是离散型的．设 (X, Y) 的可能取值为 (x_i, y_j)，$i,j=1, 2,\cdots$，则把

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij} \qquad i, j=1, 2,\cdots$$

称作 (X, Y) 的分布律，或 X 和 Y 的联合分布律．

当 (X, Y) 是二维离散型随机变量时，X 和 Y 都是离散型随机变量．关于 X 的边缘分布律为

$$P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij} \triangleq p_{i\cdot}, \qquad i=1, 2,\cdots;$$

关于 Y 的边缘分布律为

$$P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij} \triangleq p_{\cdot j}, \qquad j=1, 2,\cdots.$$

这里"$\triangleq$"表示"定义为"或"记作"．

联合分布律具有下述性质：

(1) $p_{ij}\geqslant 0$， $i,j=1, 2,\cdots$;

(2) $\sum\limits_i\sum\limits_j p_{ij}=1$.

3\. 二维连续型随机变量

如果存在非负可积函数 $f(x, y)$，使得 (X, Y) 的分布函数

$$F(x, y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u, v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \qquad -\infty<x, y<+\infty,$$

则称 (X, Y) 是二维连续型随机变量，函数 $f(x, y)$ 称作 (X, Y) 的概率密度函数，或 X 和 Y 的联合概率密度函数．

联合概率密度函数具有下述性质:

(1) $f(x, y) \geqslant 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$;

(3) 若 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 连续，则

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y);$$

(4) (X, Y) 落入平面区域 D 内的概率

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

对于二维连续型随机变量 (X, Y)，关于 X 的边缘分布函数为

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u, \qquad -\infty < x < +\infty$$

边缘概率密度函数为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y, \qquad -\infty < x < +\infty$$

关于 Y 的边缘分布函数为

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}v, \qquad -\infty < y < +\infty$$

边缘概率密度函数为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x, \qquad -\infty < y < +\infty.$$

4. 随机变量的独立性

设 X 和 Y 是两个随机变量，联合分布函数为 $F(x, y)$，边缘分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$. 如果

$$F(x, y)=F_X(x)F_Y(y), \qquad -\infty<x,\ y<+\infty,$$

即对任意的 x 和 y，事件 $\{X\leqslant x\}$ 和 $\{Y\leqslant y\}$ 相互独立，则称 X 与 Y 相互独立.

对于离散型随机变量，X 与 Y 相互独立当且仅当对所有的 i, j,

$$p_{ij}=p_{i\cdot}\, p_{\cdot j}.$$

对于连续型随机变量，若联合概率密度 $f(x, y)$ 和边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 连续，则 X 与 Y 相互独立当且仅当对所有的 x, y,

$$f(x, y)=f_X(x)f_Y(y).$$

实际上，当 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 至多有有穷个间断点，$f(x, y)$ 至多在有穷条曲线上不连续时，只要求上式在所有连续点成立.

5. 常见的二维概率分布

(1) 均匀分布

有界平面区域 D 上的均匀分布的密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{|D|}, & (x, y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 $|D|$ 是 D 的面积.

(2) 二维正态分布 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

密度函数为

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

其中 μ_1, μ_2, σ_1, σ_2, ρ 均为常数，且 $\sigma_1>0$, $\sigma_2>0$, $|\rho|<1$.

若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，则

(1) $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，　　$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$；

(2) X 与 Y 相互独立当且仅当 $\rho = 0$.

6. 二元随机变量函数的分布

和一元时的情况类似，已知 (X, Y) 的密度函数 $f(x, y)$，求 $Z = g(X, Y)$ 的密度函数的基本做法如下：先求 Z 的分布函数

$$F_Z(z) = P\{g(X, Y) \leqslant z\} = \iint\limits_{g(x,y) \leqslant z} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

然后对 $F_Z(z)$ 求导得到 Z 的密度函数.

和的分布　设 X 和 Y 的联合密度函数为 $f(x, y)$，则 $Z = X + Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x)\mathrm{d}x$$

当 X 和 Y 相互独立时，设 X 和 Y 的密度函数分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，则它们的联合密度函数 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$. 于是有下述卷积公式：

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z - y)f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z - x)\mathrm{d}x$$

7. 条件分布

(1) 二维离散型随机变量的条件分布

设 (X, Y) 是二维离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \cdots.$$

关于 X 和 Y 的边缘分布律分别为

$$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}=\sum_j p_{ij},\qquad i=1,\ 2,\cdots;$$

$$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}=\sum_i p_{ij},\qquad j=1,\ 2,\cdots.$$

对于固定的 j，若 $p_{\cdot j}>0$，则称

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\qquad i=1,\ 2,\cdots.$$

为在条件 $Y=y_j$ 下随机变量 X 的条件分布律.

同样，对于固定的 i，若 $p_{i\cdot}>0$，则称

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},\qquad j=1,\ 2,\cdots.$$

为在条件 $X=x_i$ 下随机变量 Y 的条件分布律.

(2) 二维连续型随机变量的条件分布

设二维随机变量 (X,Y)，对任意的 $\varepsilon>0$，$P\{y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}>0$. 若极限

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}P\{X\leqslant x|y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}$$

存在，则称此极限为在条件 $Y=y$ 下 X 的条件分布函数，记作 $P\{X\leqslant x|Y=y\}$ 或 $F_{X|Y}(x|y)$，即

$$F_{X|Y}(x|y)=\lim_{\varepsilon\to0^+}P\{X\leqslant x|y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}$$

类似可定义在条件 $X=x$ 下 Y 的条件分布函数 $P\{Y\leqslant y|X=x\}$，或记作 $F_{Y|X}(y|x)$.

设二维连续型随机变量 (X,Y) 的密度函数 $f(x,y)$ 连续，若边缘密度函数 $f_Y(y)$ 在点 y 处连续，且 $f_Y(y)>0$，则在条件 $Y=y$ 下 X 的条件分布函数

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}\,\mathrm{d}u,\qquad -\infty<x<+\infty$$

条件分布密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)},\qquad -\infty<x<+\infty.$$

若边缘密度函数 $f_X(x)$ 在点 x 处连续，且 $f_X(x)>0$，则在条件 $X=x$ 下 Y 的条件分布函数

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,v)}{f_X(x)}\,\mathrm{d}v,\qquad -\infty<y<+\infty$$

条件分布密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)},\qquad -\infty<y<+\infty.$$

例 1　现有两个口袋，每个口袋中装有两个红球和两个绿球．先从第一个口袋中任取两球放入第二个口袋中，再从第二个口袋中任取 2 球．将两次取到的红球数分别记为 X 和 Y，求：

(1) (X,Y)的分布律(即 X 与 Y 的联合分布律)；

(2) X 与 Y 的边缘分布律；

(3) 判断 X 与 Y 是否独立；

(4) $P\{X\geqslant 1\}$，$P\{Y\geqslant 2\}$，$P\{X>0,Y\geqslant 1\}$．

解　(1) 易知，X,Y 的可能取值均为 0，1，2．由乘法公式得

$$P\{X=i,\ Y=j\}=P\{X=i\}\cdot P\{Y=j|X=i\}$$

$$=\frac{C_2^i\cdot C_2^{2-i}}{C_4^2}\cdot\frac{C_{2+i}^j\cdot C_{4-i}^{2-j}}{C_6^2},\qquad i,j=0,1,2.$$

计算结果如下表中间 3 行 3 列所示.

X \ Y	0	1	2	$P\{X=i\}=p_{i\cdot}$
0	$\frac{6}{90}$	$\frac{8}{90}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{12}{90}$	$\frac{36}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{4}{6}$
2	$\frac{1}{90}$	$\frac{8}{90}$	$\frac{6}{90}$	$\frac{1}{6}$
$P\{Y=j\}=p_{\cdot j}$	$\frac{19}{90}$	$\frac{52}{90}$	$\frac{19}{90}$	1

(2) $p_{0\cdot}=P\{X=0\}=\sum_{j=0}^{2}P\{X=0,\ Y=j\}=\sum_{j=0}^{2}p_{0j}=\frac{6}{90}+\frac{8}{90}+\frac{1}{90}=\frac{1}{6}$,类似地,得 $p_{1\cdot}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$,$p_{2\cdot}=\frac{1}{6}$.计算结果在上表中 $p_{i\cdot}$ 所对应的列上,$p_{\cdot j}$ 所对应的行上给出了 Y 的边缘分布律.

(3) $p_{00}=\frac{6}{90}\neq\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{90}=p_{0\cdot}\cdot p_{\cdot 0}$,即存在 i,j,使得

$$p_{ij}\neq p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$$

所以 X 与 Y 不独立.

(4) $P\{X\geqslant 1\}=p_{1\cdot}+p_{2\cdot}=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$;

$$P\{Y\geqslant 2\}=p_{\cdot 2}=\frac{19}{90};$$

$$P\{X>0,Y\geqslant 1\}=p_{11}+p_{12}+p_{21}+p_{22}$$
$$=\frac{36}{90}+\frac{12}{90}+\frac{8}{90}+\frac{6}{90}=\frac{62}{90}=\frac{31}{45}.$$

例 2 设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-(3x+4y)}, & x>0,\ y>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

求:

(1) 常数 C;

(2) 边缘分布密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$;

(3) (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)$;

(4) 讨论 X 与 Y 的独立性;

(5) $P\{0<X\leqslant 1,\quad 0<Y\leqslant 2\}$.

解 (1) 由密度函数的性质求 C.

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=C\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=C\int_0^{+\infty} e^{-3x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty} e^{-4y}\mathrm{d}y$$

$$=C\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^{+\infty}\cdot\left[-\frac{1}{4}e^{-4y}\right]_0^{+\infty}$$

$$=C\cdot\frac{1}{12}$$

所以,$C=12$.

$$(2)\ f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$

当 $x\leqslant 0$ 时, $f_X(x)=0$;

当 $x>0$ 时，

$$f_X(x)=\int_0^{+\infty}12\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\mathrm{d}y=3\mathrm{e}^{-3x}.$$

所以，

$$f_X(x)=\begin{cases}3\mathrm{e}^{-3x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

类似可求出

$$f_Y(y)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-4y}, & y>0;\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

从以上结果可看出，X 与 Y 分别服从参数为 3 和 4 的指数分布.

(3) 由联合密度函数，求联合分布函数.

当 $x\leqslant 0$ 或 $y\leqslant 0$ 时，$F(x,y)=0$；

当 $x>0$ 且 $y>0$ 时，

$$\begin{aligned}F(x,y)&=P\{X\leqslant x,\quad Y\leqslant y\}\\&=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=12\int_0^y\int_0^x\mathrm{e}^{-(3u+4v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=12\int_0^x\mathrm{e}^{-3u}\mathrm{d}u\cdot\int_0^y\mathrm{e}^{-4v}\mathrm{d}v\\&=(1-\mathrm{e}^{-3x})(1-\mathrm{e}^{-4y}),\end{aligned}$$

所以

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-3x})(1-\mathrm{e}^{-4y}), & x>0,\quad y>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(4) 不难验证

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y),$$

所以 X 与 Y 相互独立.

(5) 由于 (X,Y) 的联合分布函数已求出,所以用分布函数求 $P\{0<X\leqslant 1,0<Y\leqslant 2\}$ 更方便.

$$\begin{aligned}&P\{0<X\leqslant 1,0<Y\leqslant 2\}\\&=F(1,2)-F(1,0)-F(0,2)+F(0,0)\\&=(1-e^{-3})(1-e^{-8})\end{aligned}$$

若用密度函数求应为

$$P\{0<X\leqslant 1,0<Y\leqslant 2\}$$

$$=\iint\limits_{\substack{0<x\leqslant 1\\0<y\leqslant 2}}12e^{-(3x+4y)}dxdy=12\int_0^1 e^{-3x}dx\cdot\int_0^2 e^{-4y}dy=(1-e^{-3})(1-e^{-8})$$

例 3 设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{3}xy, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求关于 X 和 Y 的边缘密度;

(2) 判断 X 与 Y 是否独立;

(3) 求 $P\{X+Y\geqslant 1\}$.

解 (1) 当 $x<0$ 或 $x>1$ 时, $f_X(x)=0$;

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned}f_X(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\\&=\int_0^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)dy=2x^2+\frac{2}{3}x,\end{aligned}$$

所以

$$f_X(x)=\begin{cases}2x^2+\dfrac{2}{3}x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

类似可求出

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}y, & 0\leqslant y\leqslant 2;\\ 0. & 其他.\end{cases}$$

(2) 注意到

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

而

$$f_X\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f_Y\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{72}\neq\frac{1}{3}$$

所以 X 与 Y 不独立.

(3) $P\{X+Y\geqslant 1\}$

$$=\iint\limits_{x+y\geqslant 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left[x^2y+\frac{1}{6}xy^2\right]_{1-x}^2\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{5}{24}x^4+\frac{4}{9}x^3+\frac{1}{4}x^2\right]_0^1=\frac{65}{72}$$

例 4　在一简单电路中，两电阻 R_1 和 R_2 串联联接．设 R_1 与 R_2 相互独立，它们的密度函数分别为

$$f_{R_1}(r_1)=\begin{cases}\dfrac{10-r_1}{50}, & 0<r_1<10;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_{R_2}(r_2)=\begin{cases}\dfrac{10-r_2}{50}, & 0<r_2<10;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求总电阻 $R=R_1+R_2$ 的密度函数．

解　由于 R_1 与 R_2 独立，因而可以直接用和的卷积公式求 R 的密度函数．

$$f_R(r)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{R_1}(r-r_2)\cdot f_{R_2}(r_2)\mathrm{d}r_2,$$

对于上述积分关键是根据 R_1 与 R_2 的密度函数定出积分限．要使被积函数非 0，要求

$$\begin{cases}0<r-r_2<10,\\ 0<r_2<10,\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}r-10<r_2<r,\\ 0<r_2<10,\end{cases}$$

得

$$\max\{r-10,\ 0\}<r_2<\min\{r,\ 10\}$$

当 $0<r\leqslant 10$ 时，$0<r_2<r$，

$$f_R(r)=\int_0^r \frac{10-(r-r_2)}{50}\cdot\frac{10-r_2}{50}\mathrm{d}r_2$$

$$=\frac{1}{2500}\int_0^r(100-10r+rr_2-r_2^2)\mathrm{d}r_2$$

$$=\frac{1}{2500}\left[(100-10r)r_2+\frac{1}{2}rr_2^2-\frac{1}{3}r_2^3\right]_0^r$$

$$= \frac{1}{15000}(600r - 60r^2 + r^3)$$

当 $10 < r \leqslant 20$ 时，$r - 10 < r_2 < 10$，

$$f_R(r) = \int_{r-10}^{10} \frac{10-(r-r_2)}{50} \cdot \frac{10-r_2}{50} \mathrm{d}r_2$$

$$= \frac{1}{15000}(8000 - 1200r + 60r^2 - r^3)$$

综上所述，得

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{15000}(600r - 60r^2 + r^3), & 0 < r \leqslant 10; \\ \frac{1}{15000}(8000 - 1200r + 60r^2 - r^3), & 10 < r \leqslant 20; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例 5　设某种电子管的寿命(以小时计)近似服从 $N(160, 20^2)$，随机地抽取 4 只，求其中没有一只寿命小于 180 小时的概率.

解法一：设 4 只的寿命分别为 X_1, X_2, X_3, X_4，并设 $Y = \min(X_1, X_2, X_3, X_4)$，于是所求概率为

$$\begin{aligned} P\{Y \geqslant 180\} &= P\{\min(X_1, X_2, X_3, X_4) \geqslant 180\} \\ &= P\{X_1 \geqslant 180, X_2 \geqslant 180, X_3 \geqslant 180, X_4 \geqslant 180\} \\ &= \prod_{i=1}^{4} P\{X_i \geqslant 180\} \quad (X_1, X_2, X_3, X_4 \text{相互独立}) \\ &= \prod_{i=1}^{4} (1 - P\{X_i < 180\}) \\ &= \left[1 - \Phi\left(\frac{180-160}{20}\right)\right]^4 \\ &= (1 - \Phi(1))^4 = (1 - 0.8413)^4 \\ &= 0.1587^4 = 0.6343 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

解法二:设电子管的寿命为 X 小时,A = “电子管的寿命小于 180 小时”,则 $X\sim N(160,\ 20^2)$,

$$p=P(A)=P\{X\leqslant 180\}$$
$$=\Phi\left(\frac{180-160}{20}\right)=\Phi(1)=0.8413$$

随机地抽取 4 只,相当于做 4 次伯努利试验.没有一只的寿命小于 180 小时,说明 4 次试验中 A 均没发生,由二项概率公式得所求概率为

$$C_4^0p^0(1-p)^4=(1-0.8413)^4=0.6343\times 10^{-3}$$

例 6　质点从原点出发沿 X 轴向右移动.步长是随机变量,服从[0, 1]上的均匀分布,且各步的步长是相互独立的.

求:

(1) 恰走两步走出[0, 1] 区间的概率;

(2) 恰走三步走出[0, 1] 区间的概率.

解　设第一、二、三步的步长分别为 $X,\ Y,\ Z$,它们相互独立,且都服从[0, 1] 上的均匀分布.

(1) 恰好两步走出[0, 1] 当且仅当 $X<1$ 且 $X+Y\geqslant 1$. 由于 X 与 Y 相互独立,所以 X 与 Y 的联合密度为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x,\ y\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是恰好两步走出[0, 1] 区间的概率为

$$P\{X<1,\ X+Y\geqslant 1\}=\iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D 由 $x+y=1,\ x=1,\ y=1$ 所围成.在 D 上 $f(x,\ y)=1$,所以

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_{1-x}^1\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

(2) 恰好三步走出[0, 1] 区间当且仅当 $X<1$ 且 $X+Y<1$ 且

$X+Y+Z\geqslant 1$. X, Y, Z 的联合密度为

$$f(x, y, z)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x, y, z\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所求概率为

$$P\{X<1, X+Y<1, X+Y+Z\geqslant 1\}$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_{1-(x+y)}^{1}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

其实,由于被积函数为常数 1, 所以 (1), (2) 中的概率均可用几何图形的面积和体积来计算.

习　题　三

1. 已知二维随机变量 (X, Y) 服从区域 $D=\{(x, y)|\ a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$上的均匀分布,求 X, Y 的联合密度和边缘密度,并判断 X 与 Y 是否独立.

2. 二维随机变量的密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases}C(R-\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2<R^2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求:

(1) 常数 C;

(2) (X, Y) 落入圆 $x^2+y^2\leqslant r^2$ $(0<r<R)$ 内的概率.

3. 设 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases}A\sin(x+y), & 0<x<\dfrac{\pi}{2},\ 0<y<\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求:

(1) 常数 A;

(2) 关于 X 和 Y 的边缘密度;

四 随机变量的数字特征

1. 数学期望

(1) 定义

设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k, \quad k=1, 2, \cdots.$$

如果级数 $\sum_k x_k p_k$ 绝对收敛,则称该级数为 X 的数学期望,记作 EX.

即
$$EX=\sum_k x_k p_k$$

设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$. 如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛,则称该积分为 X 的数学期望,记作 EX. 即

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$$

数学期望可简称作期望或均值.数学期望反映了随机变量可能取到的值的平均值.

(2) 随机变量函数的数学期望公式

设 $Y=g(X)$. 当 X 是离散型随机变量时,X 的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k, \quad k=1, 2, \cdots.$$

若级数 $\sum_k g(x_k)p_k$ 绝对收敛,则

$$EY=E[g(X)]=\sum_k g(x_k)p_k$$

当 X 是连续型随机变量时,X 的密度函数为 $f(x)$. 若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛,则

$$EY=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

四　随机变量的数字特征

1．数学期望

(1) 定义

设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k, \quad k=1, 2, \cdots.$$

如果级数 $\sum_k x_k p_k$ 绝对收敛，则称该级数为 X 的数学期望，记作 EX.

即
$$EX=\sum_k x_k p_k$$

设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$. 如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称该积分为 X 的数学期望，记作 EX. 即

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$$

数学期望可简称作期望或均值．数学期望反映了随机变量可能取到的值的平均值．

(2) 随机变量函数的数学期望公式

设 $Y=g(X)$. 当 X 是离散型随机变量时，X 的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k, \quad k=1, 2, \cdots.$$

若级数 $\sum_k g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则

$$EY=E[g(X)]=\sum_k g(x_k)p_k$$

当 X 是连续型随机变量时，X 的密度函数为 $f(x)$. 若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则

$$EY=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

二元随机变量函数的数学期望有类似的计算公式.设二维离散型随机变量(X, Y)的分布律为$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}$, $i, j=1, 2, \cdots$,则

$$E[g(X, Y)]=\sum_i\sum_j g(x_i, y_j)p_{ij}$$

设二维连续型随机变量(X, Y)的密度为$f(x, y)$,则

$$E[g(X, Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里假设等式右端的级数或无穷积分绝对收敛.

(3) 数学期望的性质

(i) $E(C)=C$,其中C是常数;

(ii) $E(kX)=kEX$,其中k是常数;

(iii) $E(X+Y)=EX+EY$;

(iv) 若X, Y相互独立,则$E(XY)=EX\cdot EY$;

(v) $|E(XY)|^2\leqslant E(X^2)E(Y^2)$.

2. 方差

若$E[(X-EX)^2]$存在,则称它为X的方差,记作DX,即

$$DX=E[(X-EX)^2]$$

称$\sqrt{DX}$为X的标准差.

当X是离散型随机变量时,

$$DX=\sum_k (x_k-EX)^2 p_k$$

当X是连续型随机变量时,

$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)^2 f(x)\mathrm{d}x$$

方差DX反映了随机变量X取值分散的程度. DX越小,X的取值越集中;DX越大,X的取值越分散.

方差具有下述性质：

(i) $DX\geqslant 0$;

(ii) $D(C)=0$，其中 C 是常数；

(iii) $D(kX)=k^2DX$，其中 k 是常数；

(iv) 若 X, Y 相互独立，则 $D(X\pm Y)=DX+DY$;

(v) $DX=0$ 的充分必要条件是 $P\{X=C\}=1$，其中 C 是一个常数；

(vi) $DX=E(X^2)-(EX)^2$

在多数情况下，利用公式(vi)计算方差要简便一些.

根据期望和方差的性质，设 $Y=aX+b$，则

$$EY=aEX+b,\qquad DY=a^2DX.$$

常见分布的期望和方差见表 3-1.

3. 协方差和相关系数

设 (X, Y) 是二维随机变量，若 $E[(X-EX)(Y-EY)]$ 存在，则把它称作 X 和 Y 的协方差，记作 $\operatorname{cov}(X, Y)$. 即

$$\operatorname{cov}(X, Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]$$

表 3-1　常见分布的期望和方差

分　　布	期　　望	方　　差
0−1 分布	p	$p(1-p)$
二项分布 $B(n, p)$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $\mathscr{P}(\lambda)$	λ	λ
超几何分布	$\dfrac{nM}{N}$	$\dfrac{nM(N-n)(N-M)}{N^2(N-1)}$
$[a, b]$ 上均匀分布	$\dfrac{1}{2}(a+b)$	$\dfrac{1}{12}(b-a)^2$
指数分布	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2

又若 $DX\neq0$、$DY\neq0$，则称

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}$$

为 X 和 Y 的相关系数.

$\operatorname{cov}(X,Y)$ 又可记作 σ_{XY}. 显然，$DX=\sigma_{XX}$，$DY=\sigma_{YY}$.

根据随机变量函数的数学期望的计算公式，对于二维离散型随机变量 (X,Y)，

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\sum_i\sum_j(x_i-EX)(y_j-EY)p_{ij}$$

对于二维连续型随机变量 (X,Y)，

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)(y-EY)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

协方差和相关系数具有下述性质：

(i) $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$;

(ii) $\operatorname{cov}(a_1X+b_1,a_2Y+b_2)=a_1a_2\operatorname{cov}(X,Y)$;

(iii) $\operatorname{cov}(X_1+X_2,Y)=\operatorname{cov}(X_1,Y)+\operatorname{cov}(X_2,Y)$;

(iv) $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY$;

(v) 若 X 与 Y 相互独立，则 $\operatorname{cov}(X,Y)=0$;

(vi) $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm2\operatorname{cov}(X,Y)$;

(vii) $|\operatorname{cov}(X,Y)|^2\leqslant DX\cdot DY$;

(viii) $|\rho_{XY}|\leqslant1$;

(ix) $|\rho_{XY}|=1$ 当且仅当 X 与 Y 概率为 1 地线性相关，即存在常数 a 和 b，且 $a\neq0$，使得 $P\{Y=aX+b\}=1$.

相关系数 ρ_{XY} 刻画了 X 和 Y 之间的线性相关程度. 当 $\rho_{XY}=0$ 时，称 X 与 Y 不相关. 由性质(v)，若 X 与 Y 相互独立，则 X 与 Y 不相关. 但反之不一定成立.

当 X 与 Y 相互独立时，由性质(iv)和(vi)以及(v)分别可以得

到前面给出的数学期望的性质(iv)和方差的性质(iv).和方差的计算类似,在多数情况下,利用公式(iv)计算协方差要简便一些.

设(X, Y)服从二维正态分布$N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$,则

$$EX=\mu_1, \qquad EY=\mu_2,$$
$$DX=\sigma_1^2, \qquad DY=\sigma_2^2,$$
$$\mathrm{cov}(X, Y)=\rho\sigma_1\sigma_2,$$
$$\rho_{XY}=\rho.$$

4. 矩

设X和Y是随机变量,k和l是正整数.

若$E(X^k)$存在,则称它是X的k阶原点矩.

若$E[(X-EX)^k]$存在,则称它是X的k阶中心矩.

若$E(X^kY^l)$存在,则称它是X和Y的$k+l$阶混合原点矩.

若$E[(X-EX)^k(Y-EY)^l]$存在,则称它是X和Y的$k+l$阶混合中心矩.

数学期望是一阶原点矩,方差是二阶中心矩,协方差是二阶混合中心矩.

例1 某射手每次击中目标的概率为p.他手中有10发子弹准备对一目标连续射击(每次打一发),一旦击中目标或子弹打完了就立刻转移到其他地方去.求他转移前的平均射击次数.

解 设X为他转移前的射击次数.X的可能取值为0, 1, 2, …, 10.若$X=k(1\leqslant k\leqslant 9)$,说明他前$k-1$次没中,而第$k$次中了.若$X=10$,则说明他前9次均没中,而第10次中或不中.由于射击的独立性,可得X的分布律为

$$P\{X=k\}=\begin{cases} q^{k-1}p, & k=1, 2, \cdots, 9; \\ q^{10}+q^9p=q^9, & k=10. \end{cases}$$

其中,$q=1-p$.于是

$$E(X)=\sum_{k=1}^{9}kq^{k-1}p+10q^{9}=\frac{1-q^{10}}{p}$$

例 2　对某一目标进行射击，每次的命中率为 p.

(1) 求直到首次击中为止的射击次数的均值与方差；

(2) 求直到击中 r 次为止的射击次数的均值与方差.

解　(1) 设首次击中时的射击次数为 X, 则 X服从参数为 p 的几何分布，即

$$P\{X=k\}=q^{k-1}p,\qquad k=1,\ 2,\ \cdots$$

其中，$q=1-p$.

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}\\&=(1-q)\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k}=1+q+q^{2}+\cdots\\&=\sum_{k=0}^{\infty}q^{k}=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{p}.\end{aligned}$$

为求 $D(X)$, 首先求 $E(X^2)$.

$$\begin{aligned}E(X^{2})&=(1-q)\sum_{k=1}^{\infty}k^{2}q^{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}k^{2}q^{k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}k^{2}q^{k}\\&\overset{令l=k-1}{=\!=\!=}\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)^{2}q^{l}-\sum_{k=1}^{\infty}k^{2}q^{k}\\&=\sum_{l=0}^{\infty}l^{2}q^{l}+2\sum_{l=0}^{\infty}lq^{l}+\sum_{l=0}^{\infty}q^{l}-\sum_{k=1}^{\infty}k^{2}q^{k}\\&=2q\sum_{l=1}^{\infty}lq^{l-1}+\sum_{l=0}^{\infty}q^{l}\end{aligned}$$

$$= \frac{2q}{(1-q)^2} + \frac{1}{1-q} = \frac{1+q}{p^2}$$

所以

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1+q}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}$$

(2) 可用(1)中结果解(2).设总的射击次数为 Y,又设击中第 $i-1$ 次后到击中第 i 次所需要的射击次数为 X_i, $i=1, 2, \cdots, r$.且 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 相互独立,且都服从参数为 p 的几何分布.由(1)可知,$E(X_i)=\frac{1}{p}$, $D(X_i)=\frac{q}{p^2}$, $i=1, 2, \cdots, r$.易知

$$Y=X_1+X_2+\cdots+X_r$$

由均值与方差的性质可知

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{r}E(X_i)=\frac{r}{p}, \qquad D(Y)=\sum_{i=1}^{r}D(X_i)=\frac{rq}{p^2}.$$

例 3 用某台机器生产某种产品,已知正品率随着该机器所用次数的增加而指数下降,即

$$P(\text{“第 } k \text{ 次生产的产品是正品”})=e^{-\lambda k}, \qquad k=1, 2, \cdots,$$

$\lambda>0$.假设每次生产 100 件产品,试求这台机器前 10 次生产中平均生产的正品总数.

解 设前 10 次生产的正品数为 X,并设

$$X_{ki}=\begin{cases}1, & \text{第 } k \text{ 次生产的第 } i \text{ 件产品是正品;}\\ 0, & \text{否则.}\end{cases}$$

$k=1, 2, \cdots, 10$, $i=1, 2, \cdots, 100$. 则 $X=\sum_{k=1}^{10}\sum_{i=1}^{100}X_{ki}$.而 X_{ki} 服从参数 $p=e^{-\lambda k}$ 的 0-1 分布,$E(X_{ki})=e^{-\lambda k}$.所以

$$E(X)=\sum_{k=1}^{10}\sum_{i=1}^{100}E(X_{ki})=\sum_{k=1}^{10}100e^{-\lambda k}=100\sum_{k=1}^{10}e^{-\lambda k}$$

$$=\frac{100e^{-\lambda}(1-e^{-100\lambda})}{1-e^{-\lambda}}$$

例 4　设某种彩电的使用寿命服从参数 $\lambda=10^{-4}$/小时的指数分布. 随机地取出一台. 它已经使用了 5000 小时还未坏, 问还能平均使用多少小时?

解　设这种彩电的寿命为 X, 则 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

又设 Y 是使用了 5000 小时之后还能使用的时间, 当 $X>5000$ 小时时, $Y=X-5000$. 为了求 $E(Y)$, 首先求 Y 的分布. 对于 $y>0$,

$$P\{Y>y\}=P\{X>5000+y\mid X>5000\}$$

$$=\frac{1-F(5000+y)}{1-F(5000)}=\frac{e^{-\lambda(5000+y)}}{e^{-5000\lambda}}=e^{-\lambda y}$$

从而

$$P\{Y\leqslant y\}=1-e^{-\lambda y},$$

而当 $y\leqslant 0$ 时, $P\{Y\leqslant y\}=0$. 于是, Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda y}, & y>0;\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

即 Y 依然服从参数为 λ 的指数分布, 所以

$$E(Y)=\frac{1}{\lambda}=10^4(\text{小时})$$

即这台彩电在使用了 5000 小时之后还能平均使用 10000 小时. 以上结果说明服从指数分布的随机变量具有"失去记忆性", 也称为具有马尔可夫性.

例 5　甲, 乙两人对局, 有一人连胜两局则终止比赛. 设每局中甲胜的概率为 p, 乙胜的概率为 $q=1-p$. 以 X 表示到比赛停止时所赛的局数, 求 $E(X)$.

解　甲先开始最后甲胜或乙先开始最后乙胜都比赛偶数次. 而

甲先开始最后乙胜或乙先开始最后甲胜都比赛奇数次.

当比赛次数 k 为偶数时,设 $k=2i$, $i\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}P\{X=k\}=P\{X=2i\}&=pq\cdots pqpp+qp\cdots qpqq\\&=(pq)^{i-1}(p^2+q^2)\end{aligned}$$

而当比赛次数 k 为奇数时,设 $k=2i+1$, $i\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}P\{X=k\}=P\{X=2i+1\}&=pq\cdots pqq+qp\cdots qpp\\&=(pq)^i(q+p)=(pq)^i\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{i=1}^{\infty}2i(pq)^{i-1}(p^2+q^2)+\sum_{i=1}^{\infty}(2i+1)(pq)^i\\&=2(p^2+q^2)\sum_{i=1}^{\infty}i(pq)^{i-1}+2pq\sum_{i=1}^{\infty}i(pq)^{i-1}+\sum_{i=1}^{\infty}(pq)^i\\&=2(p^2+q^2+pq)\sum_{i=1}^{\infty}i(pq)^{i-1}+\sum_{i=1}^{\infty}(pq)^i\\&=2(p^2+q^2+pq)\frac{1}{(1-pq)^2}+\frac{pq}{1-pq}\end{aligned}$$

注意到,$p^2+q^2+pq=(p+q)^2-pq=1-pq$,所以

$$\begin{aligned}E(X)&=\frac{2(1-pq)}{(1-pq)^2}+\frac{pq}{1-pq}\\&=\frac{2+pq}{1-pq}\end{aligned}$$

例 6　设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{b}{a}(a-|x|), & |x|\leqslant a;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

且已知方差 $D(X)=1$,求常数 a 和 b.

解　由密度函数的性质可知

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a} \frac{b}{a}(a-|x|)\,\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{0}^{a} \frac{b}{a}(1-x)\,\mathrm{d}x=ab$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a} x\cdot\frac{b}{a}(a-|x|)\,\mathrm{d}x=0\ (\text{被积函数为奇函数}).$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

$$=\int_{-a}^{a} x^2\cdot\frac{b}{a}(a-|x|)\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a} x^2\cdot\frac{b}{a}(a-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}a^3 b=1$$

于是得方程组

$$\begin{cases} ab=1; \\ \dfrac{1}{6}a^3 b=1. \end{cases}$$

解得

$$a=\sqrt{6}, \qquad b=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

例 7 设 ξ, η 是相互独立的随机变量，都服从 $N(\mu, \sigma^2)$，令

$$X=\alpha\xi+\beta\eta,\ Y=\alpha\xi-\beta\eta\ (\alpha, \beta \text{ 均为非零常数}),$$

求协方差 $\mathrm{cov}(X, Y)$ 和相关系数 ρ_{XY}.

解 由于 ξ, η 的独立性，容易算出：

$$E(X)=(\alpha+\beta)\mu, \qquad E(Y)=(\alpha-\beta)\mu,$$

$$E(XY)=E(\alpha^2\xi^2-\beta^2\eta^2)$$
$$=\alpha^2E(\xi^2)-\beta^2E(\eta^2)$$
$$=\alpha^2(\sigma^2+\mu^2)-\beta^2(\sigma^2+\mu^2)$$
$$=(\alpha^2-\beta^2)(\sigma^2+\mu^2)$$

$$D(X)=D(Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$$

于是，

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,\ Y)&=E(XY)-E(X)E(Y)\\&=(\alpha^2-\beta^2)(\sigma^2+\mu^2)-(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\mu^2\\&=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2\end{aligned}$$

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,\ Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2}{(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

习　题　四

1. 将 3 只球随机地放入 4 个盒子中，盒子分别标有标号 1, 2, 3, 4. 设 X 为有球的盒子的最小号码，求 $E(X)$.

2. 射击比赛，每人射四次（每次一发），约定全部不中得 0 分，只中一弹得 15 分，中两弹得 30 分，中三弹得 55 分，中四弹得 100 分，某人每次射击的命中率为 3/5，求他得分的数学期望.

3. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, & |x|\leqslant\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

4. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty.$$

求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

5. 点随机地落在中心在原点，半径为 R 的圆周上，并且对弧长是均匀分布的，求落点的横坐标的方差.

6 设 X 与 Y 的联合密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases}4xye^{-(x^2+y^2)}, & x>0, y>0;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的均值.

7. 掷 n 颗骰子,求点数之和 X 的数学期望和方差.

8. 将 n 个球放入 M 个盒子中,设每个球落入各盒子是等可能的.求有球的盒子数 X 的均值.

9. 设 (X, Y) 服从区域 $D=\{(x, y)|0<x<1, \quad 0<y<1\}$ 上的均匀分布,求相关系数 ρ_{XY}.

10. 设 X, Y 相互独立,密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-(y-5)}, & y>5;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求 $E(XY)$.

11. 设 X 服从参数为 λ 的指数分布,当 $k<X\leqslant k+1$ ($k=0, 1, 2, \cdots$) 时,令 $Y=k$,求 $E(Y)$.

12. 对产品进行抽查,只要发现废品就认为这批产品不合格,并结束抽查.若抽查到第 n 件还未发现废品则认为这批产品合格.假设产品数量很大,每次抽查到次品的概率都是 p,试求平均抽查的件数.

13. 一袋中装有 m 个白球,n 个黑球.现从袋中有放回地取球.设直至取到白球为止时取到的黑球数为 X,求 $E(X)$.

14. 设 (X, Y) 服从 $N(\mu, \mu, \sigma^2, \sigma^2, \rho)$,求 $D(X+Y)$ 和 $D(X-Y)$.

15. 设 (X, Y) 服从区域 D 上的均匀分布,其中 D 由 x 轴,y 轴和 $x+y=1$ 所围成.求相关系数 ρ_{XY}.

五　大数定律和中心极限定理

1. 切比雪夫(Chebyshev)不等式

切比雪夫不等式　设随机变量 X 的期望 EX 和方差 DX 存在，则对任意的 $\varepsilon>0$，

$$P\{|X-EX|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

切比雪夫不等式的另一种形式是

$$P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

切比雪夫不等式给出了在未知 X 的分布的情况下，对概率 $P\{|X-EX|\geqslant\varepsilon\}$ 或 $P\{|X-EX|<\varepsilon\}$ 的估计．它在理论上有重要意义．但在已知 X 的分布时，通常不使用切比雪夫不等式，因为这种估计往往太粗略了．

2. 大数定律

切比雪夫大数定律　设随机变量 $X_k(k=1,\ 2,\cdots)$ 相互独立，且有相同的数学期望和方差：$EX_k=\mu$，$DX_k=\sigma^2$，$k=1,\ 2,\cdots$，则对任意的 $\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$$

切比雪夫大数定律表明，n 个相互独立的、具有相同数学期望和方差的随机变量，当 n 很大时，它们的算术平均值几乎是一个常数．这个常数就是它们的数学期望．

伯努利(Bernoulli)大数定律　设 n 次伯努利试验中事件 A 发生的次数为 m，在每次试验中 A 发生的概率为 p，则对任意的 $\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$$

伯努利大数定律是切比雪夫大数定律的特殊情况．它表明，当 n 很大时，n 次伯努利试验中事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 几乎等于事件 A 在每次试验中发生的概率 p．这就以严格地数学形式刻画了在伯努利试验中频率的稳定性．

3．泊松(Poisson)定理

泊松定理　设随机变量 $X_n(n=1,2,\cdots)$ 服从二项分布 $B(n,p_n)$，其中 $np_n=\lambda>0$ 是常数，则

$$\lim_{n\to\infty}P\{X_n=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\qquad k=0,1,\cdots.$$

根据泊松定理，在理论上，泊松分布是满足上述条件的二项分布的极限分布．在实践中，当 n 很大、p 很小、$\lambda=np$ 是一个不大的数时，可以用泊松分布 $\mathscr{P}(\lambda)$ 近似二项分布 $B(n,p)$，即

$$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\qquad k=0,1,\cdots,n,$$

其中 $\lambda=np$．从而可以利用泊松分布表简化二项分布的计算．

4．中心极限定理

列维－林德伯格(Levi–Lindberg)定理(独立同分布的中心极限定理)设随机变量 $X_k(k=1,2,\cdots)$ 独立同分布，且数学期望和方差存在：$EX_k=\mu$，$DX_k=\sigma^2$，则对任意的实数 x，

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu\right)\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

定理表明，当 $n\to\infty$ 时，随机变量序列

$Y_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu\right)(n=1, 2,\cdots)$ 的分布函数收敛于标准正态分布的分布函数.

棣莫弗－拉普拉斯(De Moivre - Laplace)定理　设随机变量 $X_n(n=1, 2,\cdots)$ 服从二项分布 $B(n, p)$，则对任意的实数 x，

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

棣莫弗－拉普拉斯定理是列维－林德伯格中心极限定理的特殊情况．当 n 很大、p 很小、$\lambda=np$ 是一个不大的数时，可以用泊松分布近似二项分布．当 n 很大、但 p 不很小时，不再能用泊松分布近似二项分布．此时根据棣莫弗－拉普拉斯定理，可以利用标准正态分布对二项分布做近似计算．

例 1　设$\{X_n\}$为相互独立的随机变量列，$P\{X_n = \pm\sqrt{n}\} = \frac{1}{n}$，$P\{X_n = 0\} = 1 - \frac{2}{n}$，$n=2,3,\cdots$．证明$\{X_n\}$服从大数定律．

证　容易算出，$E(X_n)=0$，$D(X_n)=2$，$n=2,3,\cdots$．令

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n+1} X_i, \qquad n=2, 3,\cdots,$$

则

$$E(Y_n)=0, \qquad D(Y_n)=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n+1} X_i\right)=\frac{1}{n^2}\cdot 2n=\frac{2}{n}.$$

$\forall \varepsilon>0$，由切比雪夫不等式可知

$$P\{|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{2}{n\varepsilon^2}$$

故有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon\} = 1$$

所以$\{X_n\}$服从大数定律.

例 2　设$\{X_n\}$为相互独立的随机变量列. $P\{X_n = \pm 2^n\} = \dfrac{1}{2^{2n+1}}$,

$P\{X_n = 0\} = 1 - \dfrac{1}{2^{2n}}$, $n = 1,2,\cdots$, 证明$\{X_n\}$服从大数定律.

证　容易计算, $E(X_n) = 0$, $D(X_n) = 1$, $n = 1,2,\cdots$. 令

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad n = 1,2,\cdots.$$

则

$$E(Y_n) = 0, \qquad D(Y_n) = \frac{1}{n}.$$

$\forall \varepsilon > 0$, 由切比雪夫不等式可知

$$P\{|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

故有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon\} = 1$$

所以$\{X_n\}$服从大数定律.

例 3　已知生男孩的概率为 0.515, 求在 10000 个新生婴儿中女孩不少于男孩的概率.

解　设 X 为 10000 个婴儿中男孩的个数, 则 $X \sim B(n,p)$, 其中 $n = 10000$, $p = 0.515$. 女孩数不少于男孩数, 即 $X \leqslant 5000$. 由棣莫佛尔－拉普拉斯中心极限定理, 所求概率为

$$P\{X \leqslant 5000\} = P\left\{\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leqslant \frac{5000 - np}{\sqrt{npq}}\right\}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{5000-10000\times 0.515}{\sqrt{10000\times 0.515\times 0.485}}\right)$$

$$=\Phi(-3.00)=1-\Phi(3)$$

$$=1-0.99865=0.00135$$

例 4　设某一保险公司的老年人寿保险一年有 1 万人参加，每人每年交 40 元．若老人死亡，公司付给家属 2000 元．设老人死亡率为 0.017，试求保险公司在这次保险中亏本的概率．

解　设老人死亡数为 X，则 $X\sim B(n,p)$，其中，$n=10000$，$p=0.017$.

由题设可知，公司亏本当且仅当 $2000X>40\times 10000$，即 $X>200$．于是，由棣莫佛尔－拉普拉斯中心极限定理，公司亏本的概率为

$$P\{X>200\}=P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{npq}}>\frac{200-np}{\sqrt{npq}}\right\}$$

$$\approx 1-\Phi\left(\frac{200-np}{\sqrt{npq}}\right)=1-\Phi(2.321)$$

$$=1-0.98983=0.01017$$

例 5　计算机在进行加法运算时，先对每个加数取整．设所有的取整误差是相互独立的且都服从 $(-0.5,0.5]$ 上的均匀分布．现将 1500 个数相加，求总误差的绝对值不超过 15 的概率．

解　设第 i 个数的取整误差为 X_i，则 $X_i\,(i=1,2,\cdots,1500)$ 是相互独立且都服从 $(-0.5,0.5)$ 上的均匀分布．总误差 $X=\sum_{i=1}^{1500}X_i$．由均匀分布的均值与方差计算公式可知

$$E(X_i)=0,\qquad D(X_i)=\frac{1}{12},\qquad i=1,2,\cdots,1500,$$

$$E(X)=0, \qquad D(X)=\frac{1500}{12}=125.$$

利用列维－林德伯格中心极限定理可得

$$P\{|X|\leqslant 15\}=P\left\{\left|\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right|\leqslant\frac{15-0}{\sqrt{125}}\right\}$$

$$=P\left\{\left|\frac{X}{\sqrt{125}}\right|\leqslant 1.34\right\}$$

$$\approx 2\Phi(1.34)-1=2\times 0.90988-1=0.8198$$

习 题 五

1. 设一个系统由 100 个相互独立起作用的部件所组成，每个部件损坏的概率为 0.1，必须有 85 个以上的部件正常工作才能使系统工作，求系统工作的概率．

2. 现有一批种子，其中良种占 $\frac{1}{6}$，今任取 6000 粒，问能以 0.99 的概率保证在这 6000 粒种子中良种所占的比例与 $\frac{1}{6}$ 的差的绝对值不超多少？相应的良种数在哪个范围内？

3. 某单位有 200 台电话分机，每台分机有 5% 的时间要使用外线．假如每台分机是否使用外线是相互独立的，问该单位总机要安装多少条外线，才能以 90% 以上的概率保证分机用外线不需等待？

4. 在掷硬币试验中，至少掷多少次，才能使正面出现的频率落在 (0.4, 0.6) 区间的概率不小于 0.9?

5. 一台加法器同时收到 20 个噪声电压 $V_k(k=1,2,\cdots,20)$，设它们是相互独立的随机变量，且都服从 (0,10) 上的均匀分布，记 $V=\sum_{k=1}^{20}V_k$，求 $V>105$ 的概率．

六　数理统计的基本概念

1. 总体和样本

设 X 是一个随机变量，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一组相互独立且与 X 有相同分布的随机变量．称 X 为总体，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，简称样本，n 为样本的容量．在一次试验中，样本的观察值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称作样本值．

设总体 X 的密度为 $f(x)$，则样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合密度函数为 $f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$．

给定 n 个样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，不妨设按大小顺序排列，它们的顺序为

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n,$$

称

$$F_n(x)=\begin{cases} 0, & x<x_1; \\ \dfrac{k}{n}, & x_k \leqslant x<x_{k+1}, \quad k=1,2,\cdots,n-1; \\ 1, & x_n \leqslant x, \end{cases}$$

为经验分布函数．

设总体 X 的分布函数为 $F(x)$，$x_k \leqslant x < x_{k+1}$，则 n 个样本值中不大于 x 的个数为 k. 把每个样本值作为一个试验结果，在这 n 次独立重复试验中，事件 $\{X \leqslant x\}$ 发生的概率为 $\dfrac{k}{n}$．根据伯努利大数定律，对于任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n \to \infty} P\{|F_n(x)-F(x)|<\varepsilon\}=1.$$

事实上，关于分布函数与经验分布函数有下述更强的结论：

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|F_n(x)-F(x)\right|=0\right\}=1.$$

上述定理表明，当样本容量 n 充分大时，样本取值的分布相当准确地反映了总体 X 的分布. 从而，有可能通过样本值来了解总体 X 的情况.

2. 统计量

设 X_1、X_2, …、X_n 是来自总体 X 的样本. 如果随机变量的函数 $g(X_1、X_2,\cdots、X_n)$ 中不含任何未知参数，且本身是一个随机变量，则称它是一个统计量.

常见的统计量有：

样本均值 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,

样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,

样本标准差 $S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$,

样本 k 阶原点矩 $M_k=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$, $k=1, 2,\cdots$,

样本 k 阶中心矩 $M_k'=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$, $k=2, 3,\cdots$,

计算样本方差和二阶中心矩时，常使用下述公式

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2.$$

3. χ^2 分布、t 分布和 F 分布

设随机变量 X_1, X_2, …, X_n 相互独立且都服从标准正态分布，则称 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 服从的分布为自由度为 n 的 χ^2 分布，记作 $\chi^2(n)$. 它的密度如图 3-5 所示.

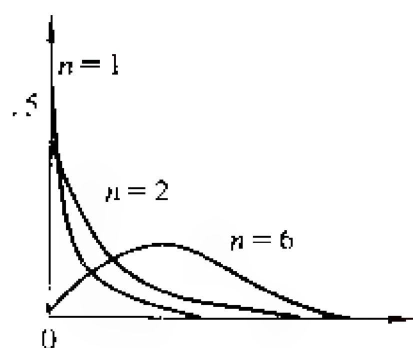


图 3-5 χ^2 分布

设随机变量 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，且相互独立，则称 $Z = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从的分布为自由度为 n 的 t 分布，记作 $t(n)$. 它的密度如图 3-6 所示.

当 $n \to \infty$ 时，$t(n)$ 的密度函数收敛于 $\phi(x)$.

设随机变量 $X \sim \chi^2(n_1)$，$Y \sim \chi^2(n_2)$，且相互独立，则称 $Z = \dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从的分布为自由度为 n_1，n_2 的 F 分布，记作 $F(n_1, n_2)$，其中 n_1 称作第一自由度，n_2 称作第二自由度. 它的密度如图 3-7 所示.

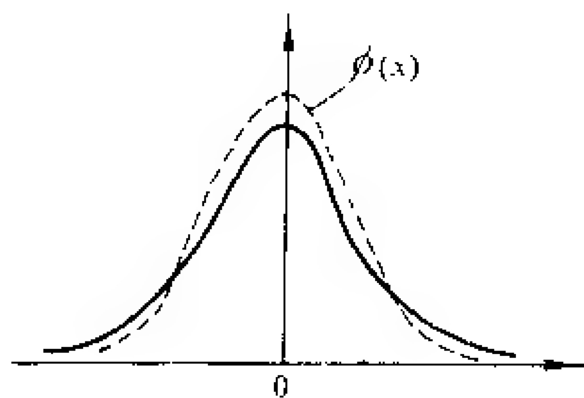


图 3-6 t 分布

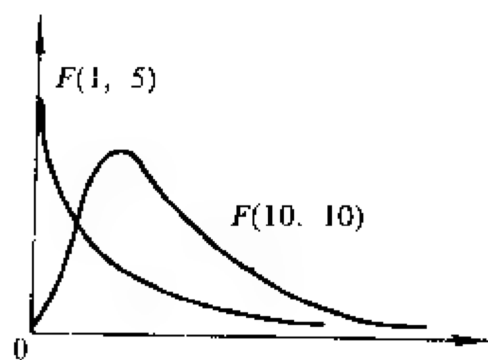


图 3-7 F 分布

4. 分位数

设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$, $0<p<1$. 若

$$P\{X\leqslant x_p\}=\int_{-\infty}^{x_p} f(x)\,\mathrm{d}x=p.$$

则称 x_p 为对应 p 的下侧分位数，简称分位数. 给定 p, 求分位数 x_p, 恰好是给定 x, 求分布函数 $F(x)$ 的逆运算. 图 3－8 给出分位数的示意图.

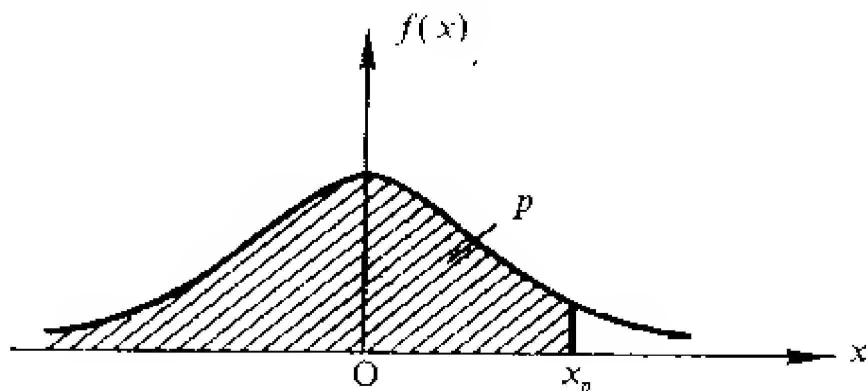


图 3－8

关于分位数，有下述性质:

(1) $P\{X\leqslant x_p\}=p$;

(2) $P\{X>x_{1-p}\}=p$, 见图 3－9 中 (a) 图所示;

(3) 若 X 的密度函数 $f(x)$ 为偶函数，则

$$P\{|X|>x_{1-\alpha/2}\}=\alpha,$$

见图3－9 中 (b) 图所示.

标准正态分布、自由度为 n 的 χ^2 分布、自由度为 n 的 t 分布和自由度为 n_1 和 n_2 的 F 分布的分位数分别记作 u_p、$\chi_p^2(n)$, $t_p(n)$ 和 $F_p(n_1, n_2)$.

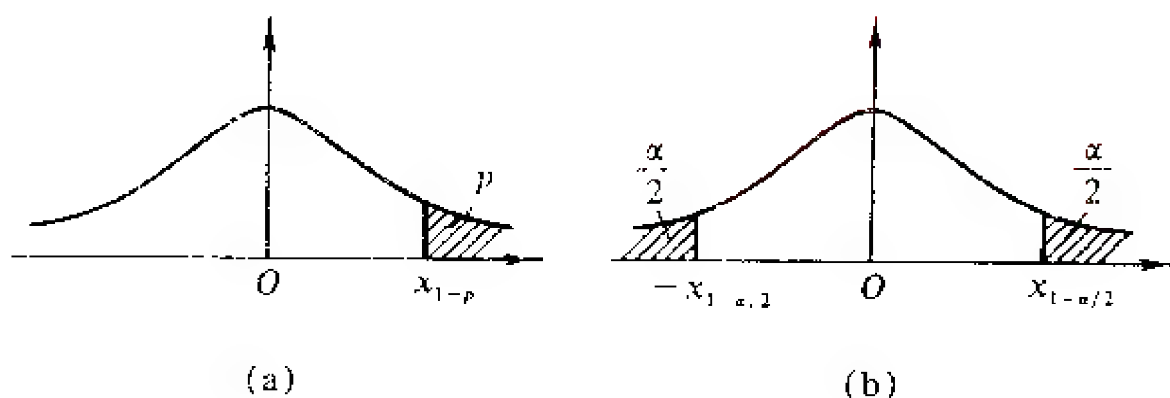


图 3-9

根据标准正态分布、t 分布和 F 分布的性质，分位数还满足下述几个公式：

(4) $u_p = -u_{1-p}$；

(5) $t_p(n) = -t_{1-p}(n)$；

(6) $F_p(n_1, n_2) = \dfrac{1}{F_{1-p}(n_2, n_1)}$；

(7) 当 n 足够大时（如 $n>120$），$t_p(n) \approx u_p$.

根据(4)—(6)，标准正态分布、t 分布和 F 分布的分位数只须列出 $p \geqslant 0.5$ 的数值．当 $p<0.5$ 时，先从分位数表上查到对于 $1-p$ 的分位数，再用有关公式就能得到所求分位数．

必须说明的是，按照国家标准，应采用下侧分位数．但是，在一些教材中仍按照习惯对标准正态分布和 t 分布使用双侧分位数，而对 χ^2 分布和 F 分布使用上侧分位数．下面给出双侧和上侧分位数的概念及它们与下侧分位数（分位数）之间的关系．

设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，$0<\alpha<1$．若

$$P\{X > x_\alpha^{\text{上}}\} = \int_{x_\alpha^{\text{上}}}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \alpha$$

则称 $x_\alpha^{上}$是对应 α 的上侧分位数.

当密度函数 $f(x)$ 为偶函数时,若

$$P\{|X|>x_\alpha^{双}\}=2\int_{x_\alpha^{双}}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\alpha$$

则称 $x_\alpha^{双}$是对应 α 的双侧分位数.

根据下述关系,在这三个分位数中,只要知道其中的一个,就可以求出另外两个:

$$x_\alpha^{上}=x_{1-\alpha}, \qquad x_\alpha^{双}=x_{1-\alpha/2}.$$

特别地,对于正态分布和 t 分布,有

$$u_\alpha^{双}=u_{1-\alpha/2}, \qquad t_\alpha^{双}(n)=t_{1-\alpha/2}(n).$$

而对于χ^2分布和 F 分布,有

$$\chi_\alpha^{2上}(n)=\chi_{1-\alpha}^2(n), \qquad F_\alpha^{上}(n_1, n_2)=F_{1-\alpha}(n_1, n_2).$$

还有以下两点需要注意:

(1) 任何"概率论与数理统计"书上,均有标准正态分布的分布函数表,对它反查表就可以得到标准正态分布的分位数.

(2) 本书中均使用下侧分位数,即分位数,在使用中不再说明.

5. 正态总体的常用统计量的分布

(1) 单个正态总体

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本,则

(i) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$;

(ii) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$;

(iii) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.

(2) 两个正态总体

设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别是来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，且相互独立．它们的样本均值和样本方差分别记作$\overline{X}$、S_1^2 和 $\overline{Y}$，S_2^2，则

(i) $\dfrac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$;

(ii) $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$;

(iii) 如果 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，则 $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$;

其中 $$S_W^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}.$$

例 1　设随机变量 $X \sim N(0,1)$，$\alpha=0.01$，求 λ, v, δ，使得：

(1) $P\{|X|>\lambda\}=\alpha$;

(2) $P\{X>v\}=\alpha$;

(3) $P\{X<-\delta\}=\alpha$.

解　(1)　可用两种方法查出 λ.

方法一：使用标正态分布的分位数表．由于标准正态分布的密度函数为偶函数，可用公式

$$P\{|X|>x_{1-\alpha/2}\}=\alpha$$

来求 λ. 由于 $\alpha=0.01$, 可得

$$\lambda=u_{1-0.005}=u_{0.995}$$

查表得

$$\lambda=2.576.$$

方法二：使用标准正态分布的分布函数表.

$$\begin{aligned}P\{|X|>\lambda\}&=1-P\{|X|\leqslant\lambda\}\\&=1-P\{-\lambda\leqslant X\leqslant\lambda\}\\&=1-(\Phi(\lambda)-\Phi(-\lambda))\\&=1-(2\Phi(\lambda)-1)\\&=2-2\Phi(\lambda)\end{aligned}$$

于是有

$$2-2\Phi(\lambda)=0.01$$

解得

$$\Phi(\lambda)=0.995$$

反查分布函数表得

$$\lambda=2.57.$$

(2) 也可用两种方法查出 v.

方法一：使用分位数表.

$$P\{X>v\}$$

$$=1-P\{X\leqslant v\}=\alpha$$

得

$$P\{X\leqslant v\}=1-\alpha$$

因而可得

$$v=u_{1-\alpha}=u_{0.99}$$

查表得

$$v=2.326.$$

方法二：用分布函数表．

由

$$P\{X \leqslant \nu\}=1-\alpha=0.99$$

反查分布函数表，得

$$\nu=2.33.$$

(3)　方法一：用分位数表．由分位数的定义和性质可知，

$$P\{X<u_{0.01}\}=0.01$$

于是

$$\delta=-u_{0.01}=u_{1-0.01}=u_{0.99}=2.326.$$

方法二．用分布函数表，得 $\delta=2.33$．

由于反查分布函数表一般只能给出小数点后边两位，所以精度比用分位数表低些．

例 2　设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是一组样本，样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S^2．

(1)　设 $n=25$，求 $P\{\mu-0.2\sigma<\overline{X}<\mu+0.2\sigma\}$；

(2)　要使 $P\{|\overline{X}-\mu|>0.1\sigma\}\leqslant 0.05$，问 n 至少应等于多少？

(3)　设 $n=10$，求使 $P\{\mu-\lambda S<\overline{X}<\mu+\lambda S\}=0.90$ 的 λ；

(4)　设 $n=10$，求使 $P\{S^2>\lambda\sigma^2\}=0.95$ 的 λ；

(5)　设 $n=10$，求使 $P\{S^2<\lambda\sigma^2\}=0.95$ 的 λ．

解　(1)　由于 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，$n=25$，可得

$$P\{\mu-0.2\sigma<X<\mu+0.2\sigma\}$$

$$=P\left\{-0.2\sqrt{n}<\frac{X-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<0.2\sqrt{n}\right\}$$

$$=P\left\{-1<\frac{X-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<1\right\}$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1$$
$$=2\times0.8413-1=0.6826$$

(2) 由 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$, 可得

$$P\{|\overline{X}-\mu|>0.1\sigma\}$$
$$=P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>0.1\sqrt{n}\right\}$$
$$=2-2\Phi(0.1\sqrt{n})\leqslant0.05$$

解得

$$\Phi(0.1\sqrt{n})\geqslant0.975$$

反查标准正态分布的分布函数表，可得

$$\Phi(1.96)=0.975$$

因而要求 $0.1\sqrt{n}\geqslant1.96$, 即 $n\geqslant1.96^2\times100=384.16$, 所以应取 n 至少为 385.

(3) 由于 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$, 因而可得

$$P\{\mu-\lambda S<\overline{X}<\mu+\lambda S\}$$
$$=P\left\{-\lambda\sqrt{n}<\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<\lambda\sqrt{n}\right\}$$
$$=P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<\lambda\sqrt{n}\right\}-P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<-\lambda\sqrt{n}\right\}$$
$$=2P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<\lambda\sqrt{n}\right\}-1=0.90$$

解得

$$P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<\lambda\sqrt{n}\right\}=0.95$$

对于 $n=10$，查 t 分布的分位数表可得

$$t_{0.05}(9)=1.833$$

于是

$$\lambda\sqrt{10}=1.833$$

解得　$\lambda=0.580$.

(4) 由于 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，因而

$$P\{S^2>\lambda\sigma^2\}=P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>(n-1)\lambda\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\leqslant(n-1)\lambda\right\}=0.95$$

解得

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\leqslant(n-1)\lambda\right\}=0.05$$

即得

$$(n-1)\lambda=\chi^2_{0.05}(n-1)$$

对于 $n=10$，查 χ^2 分布的分位数表得

$$\lambda=0.369.$$

(5) 类似于(4)，

$$P\{S^2<\lambda\sigma^2\}=P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<(n-1)\lambda\right\}=0.95$$

由分位数定义可得

$$(n-1)\lambda=\chi^2_{0.95}(n-1)$$

对于 $n=10$，查 χ^2 分布的分位数表可得

$$\lambda=1.880.$$

习　题　六

1. 对于以下四组样本值，计算样本均值 $\overline{x}$ 和样本方差 s^2：

(1) 99.3，　98.7，　100.05，　101.2，　98.3，　99.7，　99.5，　102.1，　100.5；

(2) 54，　67，　68，　78，　70，　66，　67，　70，　65，　69；

(3) 112.0，　113.4，　111.2，　112.0，　114.5，　112.9，　113.6；

(4) 110.3，　99.7，　101.5，　102.2，　99.3，　100.7，　100.5，　103.1.

2. 查表求下述分位数：

(1) $u_{0.855}$，　$u_{0.995}$，　$u_{0.001}$，　$u_{0.25}$；

(2) $\chi^2_{0.025}(6)$，　$\chi^2_{0.10}(20)$，　$\chi^2_{0.95}(12)$，　$\chi^2_{0.99}(18)$；

(3) $t_{0.975}(15)$，　$t_{0.01}(7)$，　$t_{0.95}(250)$；

(4) $F_{0.95}(12,6)$，　$F_{0.975}(8,20)$，　$F_{0.10}(5,12)$.

3. 用 χ^2 分布分位数表求下列各式中 λ 的值．式中 $\chi^2(n)$ 表示服从自由为 n 的 χ^2 分布的随机变量．

(1) $P\{\chi^2(8)>\lambda\}=0.01$；

(2) $P\{\chi^2(8)<\lambda\}=0.975$；

(3) $P\{\chi^2(15)>\lambda\}=0.995$；

(4) $P\{\chi^2(15)<\lambda\}=0.01$.

4. 用 t 分布分位数表，查下列各式中 λ 的值，式中 $t(n)$ 表示服从自由度为 n 的 t 分布的随机变量．

(1) $P\{|t(5)|>\lambda\}=0.2$；

(2) $P\{t(5)>\lambda\}=0.2$.

5. 用 F 分布分位数表，查下列各式中 λ 的值，式中 $F(n_1,n_2)$ 表示服从自由度为 n_1 和 n_2 的 F 分布的随机变量．

(1) $P\{F(3,6)>\lambda\}=0.05$；

(2) $P\{F(3,6)<\lambda\}=0.05$.

七　参数估计

1. 点估计

设 θ 是总体 X 的未知参数，用统计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 来估计 θ，称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的估计量．求参数 θ 的估计量 $\hat{\theta}$ 称作点估计．

常用样本均值 $\overline{X}$ 作为总体期望的估计量，用样本方差 S^2 作为总体方差的估计量．例如，对于正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$，取

$$\hat{\mu}=\overline{X}\ ,\quad \hat{\sigma}^2=S^2.$$

评价估计量优劣的三条常用标准是：无偏性、有效性和一致性（相合性）．

(1) 无偏性

如果 $E\hat{\theta}=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量．

对于任何总体 X，只要 EX 存在，则 $\overline{X}$ 是 EX 的无偏估计量；只要 DX 存在，则 S^2 是 DX 的无偏估计量．例如，对于正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$，$\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计量，S^2 是 σ^2 的无偏估计量．

注意用样本二阶中心矩 M_2' 作为 DX 的估计量时，不具有无偏性．M_2' 是 DX 的"偏小的"估计量，因为

$$E(M_2')=\frac{n-1}{n}E(S^2)=\frac{n-1}{n}DX<DX$$

当然，当样本容量 n 很大时，M_2' 和 S^2 相差无几．另外，虽然 S^2 是 DX 的无偏估计量，但是 S 不是 $\sqrt{DX}$ 的无偏估计量．

(2) 有效性

设 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是 θ 的无偏估计量，若 $D\hat{\theta}_1<D\hat{\theta}_2$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效．

例如，X_1 和 $\overline{X}$ 都是 EX 的无偏估计量．当 $n>1$ 时，$\overline{X}$ 比 X_1 有效，因为 $DX_1=DX$，$D\overline{X}=\frac{1}{n}DX$，于是 $D\overline{X}<DX_1$，因而 $\overline{X}$ 比 X_1 有效．

(3) 一致性

如果对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一致(相合)估计量.

由大数定律，当 DX 存在时，$\overline{X}$ 是 EX 的一致估计量. 还可以证明，S^2 和 M_2' 都是 DX 的一致估计量，S 是 $\sqrt{DX}$ 的一致估计量.

一致性保证当样本容量很大时，估计量 $\hat{\theta}$ 以很大的概率接近 θ. 从统计角度来看，自然要求估计量具有一致性. 当样本容量不大时，无偏性是对估计量的基本要求. 它保证 $\hat{\theta}$ 对 θ 的估计只有随机误差，而没有系统误差. 在直观上和理论上，有效性都是合理的. 它是经常被使用的一条标准.

2. 最大似然估计法

最大似然估计法和矩估计法是两个常用的点估计法.

对于连续型总体 X，设 X 的密度函数为 $f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_l)$，其中 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_l$ 是待估参数. 给定一组样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，把

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_l)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_l)$$

称作样本的似然函数. 在形式上，似然函数就是样本的联合密度. 只是在这里，要把 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 看作常数，把待估参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_l$ 作为 L 的自变量.

对于离散型随机变量 X，设 X 的分布律为

$$P\{X=x\}=p(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_l)$$

给定一组样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，把

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_l)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_l)$$

称作样本的似然函数.

如果似然函数 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_l)$ 在 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_l$

取到最大值，则称 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_l$ 分别为 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l$ 的最大似然估计量.

当 L 对 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l$ 的偏导数存在时，$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_l$ 必须满足下述方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \\ \quad\vdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta_l} = 0 \end{cases}$$

由于 L 和 $\ln L$ 同时达到最大值，可以改为求 $\ln L$ 的最大值点，采用下述方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \theta_1} \ln L = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta_2} \ln L = 0 \\ \quad\vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta_l} \ln L = 0 \end{cases}$$

后一组方程常比前一组方程简单.

例如　对于正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$，样本的似然函数为

$$L = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

由

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \mu} \ln L = \dfrac{1}{\sigma^2} \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L = -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2\sigma^4} \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0 \end{cases}$$

解得 μ 和 σ^2 的最大似然估计量

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X}, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 = M_2'.$$

又如，0-1 分布的分布律可写成

$$P\{X = x\} = p^x(1-p)^{1-x}, \qquad x = 0, 1.$$

似然函数为

$$L = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\ln L = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln(1-p)$$

令

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \ln L = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{1-p}\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 0$$

解得 p 的最大似然估计量

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X}$$

在这里 $\overline{X}$ 是在 n 次独立重复试验中，事件 $\{X=1\}$ 发生的频率.

通常最大似然估计量具有一致性，但不一定是无偏的. 例如，对于正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$，σ^2 的最大似然估计量是 M_2'. 它不是无偏估计量.

3. 矩估计法

设总体 X 的分布含有待估参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l$，则 X 的 k 阶原点矩 $v_k = E(X^k)$ 也含有参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l$. 记

$$g_k(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l) = E(X^k), \qquad k = 1, 2, \cdots, l.$$

从方程组

$$\begin{cases} g_1(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l) = v_1 \\ g_2(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l) = v_2 \\ \vdots \\ g_l(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l) = v_l \end{cases}$$

解出

$$\begin{cases} \theta_1 = f_1(v_1, v_2, \cdots, v_l) \\ \theta_2 = f_2(v_1, v_2, \cdots, v_l) \\ \vdots \\ \theta_l = f_l(v_1, v_2, \cdots, v_l) \end{cases}$$

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一组样本，用样本的 k 阶原点矩 $M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 估计 $v_k(k=1, 2, \cdots, l)$，代入 f_i 得到 θ_i 的估计量

$$\hat{\theta}_i = f_i(M_1, M_2, \cdots, M_l), \qquad i=1, 2, \cdots, l.$$

这种估计未知参数的办法叫做矩估计法.

在采用矩估计法时，也可以用中心矩 $\mu_k = E[(X-\overline{X})^k]$ 代替某些原点矩 v_k，然后用样本中心矩 $M_k' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k$ 替换 μ_k.

例如，设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，有 $v_1 = EX = \mu$, $v_2 = EX^2 = \sigma^2 + \mu^2$. 由

$$\begin{cases} \mu = v_1 \\ \sigma^2 + \mu^2 = v_2 \end{cases}$$

解得

$$\mu = v_1, \qquad \sigma^2 = v_2 - v_1^2.$$

用 $M_1 = \overline{X}$, M_2 分别替换 v_1, v_2，得到矩估计量

$$\hat{\mu} = \overline{X}$$

$$\hat{\sigma}^2 = M_2 - \overline{X}^2 = M_2'$$

4. 区间估计

(1) 区间估计的概念

设总体 X 的分布含有参数 θ，对于给定的值 $\alpha(0<\alpha<1)$，如果统计量 $\underline{\theta}$ 和 $\overline{\theta}$ 满足

$$P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}=1-\alpha$$

则称随机区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

(2) 单个正态总体均值和方差的置信区间

设总体 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，样本 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$，样本均值和样本方差分别为 $\overline{X}$ 和 S^2.

(i) 已知 σ^2，求 μ 的置信区间

由

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,\ 1)$$

有

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<u_{1-\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

即

$$P\left\{\overline{X}-u_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+u_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$$

得 μ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-u_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \overline{X}+u_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

(ii) 未知 σ^2，求 μ 的置信区间

由

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

有

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|<t_{1-\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

得 μ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-t_{1-\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{X}+t_{1-\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

(iii) 求 σ^2 和 σ 的置信区间

由

$$\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(n-1)$$

有

$$P\left\{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)<\frac{n-1}{\sigma^2}S^2<\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

得 σ^2 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\ ,\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$$

σ 的置信区间为

$$\left(\sqrt{(n-1)/\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\cdot S,\quad \sqrt{(n-1)/\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\cdot S\right)$$

(3) 两个正态总体均值差和方差比的置信区间

设分别来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的相互独立的两组样本，其容量分别为 n_1 和 n_2，样本均值、样本方差分别为 $\overline{X}$、S_1^2 和 $\overline{Y}$、S_2^2 .

(i) 已知 σ_1^2 和 σ_2^2，求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

由

$$\frac{(X-Y)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,\ 1)$$

可以得到 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-u_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \overline{X}-\overline{Y}+u_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

(ii) $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，但其值未知，求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

由

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

可以得到 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\cdot S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\right.$$

$$\left.\overline{X}-\overline{Y}+t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\cdot S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

其中 $S_W^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.

(iii) 求方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

由

$$\frac{\sigma_2^2S_1^2}{\sigma_1^2S_2^2}\sim F(n_1-1,\ n_2-1)$$

可以得到 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

$$\left(\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1)}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2},\ F_{1-\alpha/2}(n_2-1,\ n_1-1)\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$$

例 1　设总体 X 服从几何分布，即

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}\cdot p,\qquad k=1,2,\cdots,$$

求 p 的最大似然估计量．

解　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 X 的给定的样本值，X 的似然函数

$$L=\prod_{i=1}^{n}(1-p)^{x_i-1}\cdot p=(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)}\cdot p^n$$

$$\ln L=\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)\ln(1-p)+n\ln p$$

令

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln L=-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)}{1-p}+\frac{n}{p}=0.$$

解出

$$p=\frac{1}{\overline{x}}$$

从而得到 p 的最大似然估计量

$$\hat{p}=\frac{1}{\overline{X}}$$

例 2　设总体的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha}, & 0<x<1;\\ 0\ , & 其他.\end{cases}$$

其中 $\alpha>-1$. 试求 α 的最大似然估计量和矩估计量．

解　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为总体 X 的样本值，$0<x_i<1,i=1,2,\cdots,n$.

(1)　似然函数为

$$L=(\alpha+1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\alpha}$$

$$\ln L = n\ln(\alpha+1) + \alpha\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\ln L = \frac{n}{\alpha+1} + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$$

解出

$$\alpha = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i} - 1$$

从而得到 α 的最大似然估计量为

$$\hat{\alpha} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i} - 1$$

(2) 先求均值.

$$E(X) = \int_0^1 (\alpha+1)x^{\alpha+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha+1}{\alpha+2}$$

以 $M_1 = \overline{X}$ 替换 $E(X)$，得

$$\frac{\alpha+1}{\alpha+2} = \overline{X}$$

从而解出 α 的矩估计量

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{1-\overline{X}} - 2$$

例 3　已知总体 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$，今测得一组样本值为：
3.3,　-0.3,　-0.6,　-0.9.

(1) 若已知 $\sigma^2=9$，求 μ 的 95% 的置信区间；

(2) 若 σ^2 未知，求 μ 的 95% 的置信区间.

解　经计算可得到 $\overline{x}=0.375$, $s^2=3.86$ $(s=1.965)$.

(1) 已知方差 σ^2，μ 的 $(1-\alpha)\%$ 的置信区间公式为

$$\left(\overline{X}-u_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

用 $\overline{x}=0.375$ 代替 $\overline{X}$，$u_{1-\alpha/2}=u_{0.975}=1.96$，$\sigma=3$，$n=4$，得 μ 的置信区间(观察值)为

$$\left(0.375-1.96\cdot\frac{3}{2}, 0.375+1.96\cdot\frac{3}{2}\right)=(-2.565,\ 3.315)$$

(2) 未知方差 σ^2，μ 的 $(1-\alpha)\%$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-t_{1-\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+t_{1-\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

用 $\overline{x}=0.375$ 代替 $\overline{X}$，$t_{1-\alpha/2}(3)=t_{0.975}(3)=3.182$，$s=1.965$ 代替 S 得 μ 的置信区间(观察值)为

$$\left(0.375-3.182\cdot\frac{1.965}{2}, 0.375+3.182\cdot\frac{1.965}{2}\right)$$

$$=(-2.751,\ 3.502)$$

例 4　设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，若 σ^2 为已知，问样本容量 n 取多大时方能保证 μ 的 95% 的置信区间长度不大于 l？

解　当方差 σ^2 已知时，样本容量为 n，正态总体的期望 μ 的 95% 的置信区间(观察值)为

$$\left(\overline{X}-u_{0.975}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+u_{0.975}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

区间长度为 $2u_{0.975}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$，其中，$u_{0.975}=1.96$. 由题意，要求

$$2\times1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqslant l$$

解得

$$n \geqslant (2\times 1.96)^2 \cdot \frac{\sigma^2}{l^2} = 15.37\frac{\sigma^2}{l^2}$$

因而，n 至少应为$\left\lceil 15.37\frac{\sigma^2}{l^2}\right\rceil$. 其中$\lceil x\rceil$为不小于 x 的最小整数.

例 5　随机地从甲批导线中抽取 4 根，从乙批导线中抽取 5 根，测得电阻值如下（单位：欧姆）：

甲批导线：0.143，0.142，0.143，0.137；

乙批导线：0.140，0.142，0.136，0.138，0.140.

设甲、乙两批导线的电阻分别服从 $N(\mu_1, \sigma^2)$、$N(\mu_2, \sigma^2)$，并且它们相互独立，已知 $\sigma^2=0.0025^2$，试求 $\mu_1-\mu_2$ 的 95% 的置信区间.

解　本题是两个正态总体，已知方差 σ_1^2, σ_2^2，求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 95%（即 $\alpha=0.05$）的置信区间问题. 置信区间应为：

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-u_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\quad \overline{X}-\overline{Y}+u_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

根据已给的样本值可计算出：

$\bar{x}=0.141$，$\bar{y}=0.139$，$\bar{x}-\bar{y}=0.002$，$u_{0.975}=1.96$，并且已知 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=0.0025^2$，$n_1=4$，$n_2=5$，将它们代入上式，得置信区间（观察值）为

$$\left(0.002-1.96\times 0.0025\times\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}},\right.$$

$$\left.0.002+1.96\times 0.0025\times\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}\right)$$

$$=(0.002-0.003,\ 0.002+0.003)=(-0.001,\ 0.005)$$

例 6　设从一大批产品中随机地取出 100 个，测得一级品为 60 个. 试用中心极限定理近似求出这批产品的一级品率的置信度为

95% 的置信区间.

解　设产品的合格率为 p. 又设

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 件产品为一级品;}\\ 0, & \text{否则.}\end{cases}$$

则 X_i 服从参数为 p 的 0－1 分布, $i=1,2,\cdots,100$. 于是

$$\sum_{i=1}^{100} X_i \sim B(100,p)$$

由棣莫佛－拉普拉斯中心极限定理, 近似地有

$$P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i-100p}{\sqrt{100p(1-p)}}\right|<u_{1-\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

这里, $\alpha=0.05, u_{1-\alpha/2}=u_{0.975}=1.96, \sum_{i=1}^{100} x_i=60$, 因此应以近似于 0.95 的概率有

$$\left|\frac{60-100p}{\sqrt{100p(1-p)}}\right|<1.96$$

两边平方, 整理后得不等式

$$103.84p^2-123.84p+36<0$$

解出不等式左边二次三项式的两个根

$$p_1=0.502,\qquad p_2=0.691,$$

不等式成立当且仅当 $0.502<p<0.691$. 于是 p 的 95% 的置信区间为

$$(0.502,\ 0.691)$$

习　题　七

1. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, X_1,X_2,X_3 是样本, 试验证

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{5}X_1 + \frac{3}{10}X_2 + \frac{1}{2}X_3$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{5}{12}X_3$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{6}X_2 + \frac{1}{2}X_3$$

都是 μ 的无偏估计量，并分析哪个最好？

2. 设总体 $X \sim B(n,p)$，试求参数 p 的最大似然估计量．

3. 设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0<x<1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 p 的最大似然估计量和矩估计量．

4. 某车间生产滚珠，可设滚珠的直径 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，已知 $\sigma^2=0.05$. 从某天的产品里随机地抽取 6 个，测量直径如下（单位：毫米）：

14.70, 15.21, 14.90, 14.91, 15.32, 15.32.

试求 μ 的置信度为 99% 的置信区间．

5. 已知灯泡的使用时数 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. 随机地抽查 10 个灯泡，测得 $\overline{x}=1500$ 小时，$s=20$ 小时，试求 μ 和 σ 的置信度为 95% 的置信区间．

6. 为了检验一种杂交作物的两种新处理方案，在同一地区随机地选择 8 块地段，在各地段按两种方案处理作物，这 8 块地段的单位面积产量是（单位：公斤）：

一号方案产量：86, 87, 56, 93, 84, 93, 75, 79;

二号方案产量：80, 79, 58, 91, 77, 82, 74, 66.

假设两种产量分别服从 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma^2)$，σ^2 未知，求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 95% 的置信区间．

八　假设检验

1. 假设检验的基本思想和步骤

假设检验是一种带概率性质的反证法. 人们有一条普遍的经验, 这就是小概率事件在一次试验中很难发生. 假设检验把这条经验作为一条原则, 认为如果小概率事件在一次试验中发生则可以推翻原假设.

假设检验的基本步骤是:

(1) 提出原假设 H_0;

(2) 选择统计量;

(3) 求出在假设 H_0 成立的条件下, 统计量的概率分布;

(4) 对于给定的显著性水平 $\alpha(0<\alpha<1)$, 确定否定域. 在假设 H_0 成立的条件下, 统计量落入否定域的概率不大于 α;

(5) 根据样本值计算统计量的观察值. 若统计量的观察值落入否定域, 则拒绝 H_0(在显著性水平 α 下拒绝 H_0); 否则接受 H_0(在显著性水平 α 下接受 H_0).

与 H_0 相反的结论称作备择假设, 记作 H_1. 接受 H_0, 即认为 H_0 成立; 拒绝 H_0, 即认为 H_0 不成立, 而 H_1 成立.

2. 假设检验的两类错误

假设检验的依据是: 小概率事件在一次试验中很难发生. 但是很难发生不等于决不发生. 因而, 假设检验所做出的结论有可能是错误的. 假设检验的错误有两类:

(1) 第一类错误

如果原假设 H_0 成立, 而观察值落入否定域, 从而做出拒绝 H_0 的错误结论, 称作第一类错误.

第一类错误是"以真当假". 根据定义, 犯第一类错误的概率恰好等于显著性水平 α.

(2) 第二类错误

如果原假设 H_0 不成立，而观察值未落入否定域，从而做出接受 H_0 的错误结论，称作第二类错误.

第二类错误是"以假当真". 把犯第二类错误的概率记作 β.

人们当然希望犯两类错误的概率同时都很小. 但是，当样本容量 n 一定时，α 变小，则 β 变大；相反地，β 变小，则 α 变大. 要使 α 和 β 同时变小的途径是增大样本容量.

3. 单个正态总体的均值和方差的假设检验

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，样本的容量为 n、均值为 $\overline{X}$、方差为 S^2.

(1) 已知 σ^2，$H_0: \mu = \mu_0$

假设 H_0 成立，则

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > u_{1-\alpha/2}\right\} = \alpha$$

由此可得否定域：

$$\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > u_{1-\alpha/2}$$

(2) 已知 σ^2，$H_0: \mu \leqslant \mu_0$

取统计量 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$. 假设 H_0 成立，则

$$P\left\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > u_{1-\alpha}\right\} \leqslant P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > u_{1-\alpha}\right\} = \alpha$$

由此可得否定域：

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > u_{1-\alpha}$$

类似地， $H_0:\mu\geqslant\mu_0$.

否定域为

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}<-u_{1-\alpha}$$

原假设形如"$\mu=\mu_0$"的假设检验称作双侧检验，原假设形如"$\mu\leqslant\mu_0$"和"$\mu\geqslant\mu_0$"的假设检验称作单侧检验．(1)是双侧检验，(2)是单侧检验．注意对于同样的显著性水平 α，单侧检验和双侧检验中所取的分位数之间的差异．

(3) 未知 σ^2， $H_0:\mu=\mu_0$

假设 H_0 成立，则

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|>t_{1-\alpha/2}(n-1)\right\}=\alpha$$

否定域为

$$\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|>t_{1-\alpha/2}(n-1)$$

(4) 未知 σ^2， $H_0:\mu\leqslant\mu_0$

取统计量 $\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ ，假设 H_0 成立，则

$$P\left\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}>t_{1-\alpha}(n-1)\right\}\leqslant P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}>t_{1-\alpha}(n-1)\right\}=\alpha$$

否定域为

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}>t_{1-\alpha}(n-1)$$

类似地，$H_0: \mu \geqslant \mu_0$.

否定域为

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -t_{1-\alpha}(n-1)$$

(5) $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2$

假设 H_0 成立，则

$$\frac{n-1}{\sigma_0^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$P\left\{\frac{n-1}{\sigma_0^2} S^2<\chi_{\alpha/2}^2(n-1)\right\}=P\left\{\frac{n-1}{\sigma_0^2} S^2>\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)\right\}=\frac{\alpha}{2}$$

否定域为

$$\frac{n-1}{\sigma_0^2} S^2<\chi_{\alpha/2}^2(n-1) \text{ 或 } \frac{n-1}{\sigma_0^2} S^2>\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$$

(6) $H_0: \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$

取统计量 $\frac{n-1}{\sigma_0^2} S^2$. 假设 H_0 成立，则

$$P\left\{\frac{n-1}{\sigma_0^2} S^2>\chi_{1-\alpha}^2(n-1)\right\} \leqslant P\left\{\frac{n-1}{\sigma^2} S^2>\chi_{1-\alpha}^2(n-1)\right\}=\alpha$$

否定域为

$$\frac{n-1}{\sigma_0^2} S^2> \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$$

类似地，$H_0: \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$

否定域为

$$\frac{n-1}{\sigma_0^2} S^2<\chi_{\alpha}^2(n-1)$$

4．两个正态总体的均值和方差的假设检验

设分别来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的两个样本，它们的容量分别为 n_1 和 n_2，样本均值、样本方差分别为 $\overline{X}$、S_1^2 和 $\overline{Y}$、S_2^2．

(1) 已知 σ_1^2，σ_2^2，$H_0: \mu_1 = \mu_2$

取统计量

$$U = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

假设 H_0 成立，则 $U \sim N(0, 1)$．从而有

$$P\{|U| > u_{1-\alpha/2}\} = \alpha$$

否定域为

$$\left| \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \right| > u_{1-\alpha/2}$$

(2) 已知 σ_1^2，σ_2^2，$H_0: \mu_1 \leqslant \mu_2$

取统计量 $\dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$．假设 H_0 成立，则

$$P\left\{ \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} > u_{1-\alpha} \right\} \leqslant P\left\{ \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} > u_{1-\alpha} \right\} = \alpha$$

否定域为

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} > u_{1-\alpha}$$

(3) 已知 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，但其值未知，$H_0:\mu_1=\mu_2$

取统计量

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

其中 $S_W^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.

假设 H_0 成立，则 $T\sim t(n_1+n_2-2)$. 从而有

$$P\{|T|>t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\}=\alpha$$

否定域为

$$\left|\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right|>t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)$$

(4) 已知 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，但其值未知，$H_0:\mu_1\leqslant\mu_2$

取统计量 $\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$. 假设 H_0 成立，则

$$P\left\{\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}>t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)\right\}$$

$$\leqslant P\left\{\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}>t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)\right\}=\alpha$$

否定域为

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}>t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2).$$

(5) $H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$

取统计量

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$$

假设 H_0 成立，则 $F\sim F(n_1-1, n_2-1)$. 从而有

$$P\{F<F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\}=P\{F>F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\}=\frac{\alpha}{2}$$

否定域为

$$F<F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) \quad 或 \quad F>F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$$

(6) $H_0: \sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2$

取统计量 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$. 假设 H_0 成立，则

$$P\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}>F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)\right\}\leqslant P\left\{\frac{\sigma_2^2S_1^2}{\sigma_1^2S_2^2}>F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)\right\}=\alpha$$

否定域为

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}>F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$$

例1 糖厂用自动打包机打包，每包标准重量为100公斤，每天开工后需检验一次打包机是否能正常工作，某日开工后测9包重量(单位：公斤)：

99.3, 98.7, 100.5, 101.2, 98.3, 99.7, 99.5, 102.1, 100.5.

问在显著水平 $\alpha=0.05$ 下打包机工作是否正常？已知包重服从正态分布．

解 设包重为 X，则 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 本题要检验均值 μ 是否在

允许范围内在 $\mu_0=100$ 附近波动，因而应进行双侧检验，即检验

$$H_0: \mu=\mu_0=100$$

由于未知方差 σ^2，否定域应为

$$\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|>t_{1-\alpha/2}(n-1)$$

经计算得 $\overline{x}=99.98$，$s^2=1.47$，$s=1.21$．$\alpha=0.05$，查 t 分布分位数表得（自由度 $n-1=9-1=8$）$t_{1-\alpha/2}(n-1)=t_{0.975}(8)=2.306$.

将 $\overline{x}$，s，μ_0 代入不等式左边，得

$$\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{99.98-100}{1.21/\sqrt{9}}\right|=\left|\frac{-0.02}{0.4}\right|=0.05<2.306$$

计算结果未落入否定域，因而接受 H_0，认为打包机在正常工作．

例 2　一种元件，要求其使用寿命不低于 1000 小时，现在从这批元件中随机地抽取 25 件，测得样本均值 $\overline{x}=950$ 小时，已知该种元件的寿命服从标准差 $\sigma=100$ 小时的正态分布，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 条件下，试确定这批元件是否合格．

解　设元件的寿命为 X，则 $X\sim N(\mu, 100^2)$．按要求，$\mu\geqslant\mu_0=1000$ 才算合格，因而进行单侧检验．取原假设为

$$H_0: \mu\geqslant\mu_0=1000$$

按已知方差和 $\alpha=0.05$，否定域应为

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}<-u_{1-\alpha}$$

查表可得 $u_{1-\alpha}=u_{0.95}=1.64$．将 $\overline{x}=950$，$\mu_0=1000$，$\sigma=100$，$n=25$ 代入不等式的左边

$$\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{950-1000}{100/\sqrt{25}}=-2.5<-1.64$$

计算结果落入了否定域，所以认为这批产品不合格.

例 3　某种导线的电阻服从正态分布，要求标准差不得超过 0.005 欧姆. 今在生产的一批导线中随机地取 9 根，测得 $s=0.007$ 欧姆. 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 条件下，能认为这批导线电阻的标准差显著偏大吗?

解　设总体的电阻为 X，则 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 要求 $\sigma\leqslant 0.005$，因而应进行单侧检验. 设原假设为

$$H_0:\sigma\leqslant\sigma_0=0.005$$

否定域应为

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$$

查 χ^2 分布的分位数表，得 $\chi^2_{0.95}(8)=15.507$. 将 $s^2=0.007^2$，$n=9$，$\sigma_0^2=0.005^2$ 代入，得

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{8\times 0.007^2}{0.005^2}=15.68>15.507$$

计算结果落入了否定域，因而拒绝接受 H_0，认为标准差偏大.

例 4　检验了 26 匹马，测得每 100 毫升的血清中，所含的无机磷平均为 3.29 毫升，标准差为 0.27 毫升. 又检验了 18 头羊，每 100 毫升血清中含无机磷平均为 3.96 毫升，标准差为 0.40 毫升. 设马和羊的血清中含无机磷的量都服从正态分布，试问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 条件下，马和羊的血清中无机磷的含量有无显著性差异?

解　设马和羊的血清中无机磷的含量分别为 X 和 Y，由已知条件可知，$\bar{x}=3.29$，$s_1=0.27$，$\bar{y}=3.96$，$s_2=0.40$. 根据题目要求，应检验 μ_1 是否等于 μ_2. 但因不知方差 σ_1^2 和 σ_2^2，因而应先检验 σ_1^2 是否等于 σ_2^2. 先取

$$H_0^1:\sigma_1^2=\sigma_2^2$$

否定域为

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{F,\alpha/2}(n_1-1,n_2-1) \text{ 或 } \frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$$

查 F 分布的分位数表得 $F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.975}(25,17)=2.56$,

$$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.025}(25,17)=\frac{1}{F_{0.975}(17,25)}=\frac{1}{2.41}=0.415.$$

将 $s_1=0.27$, $s_2=0.40$ 代入 $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ 得

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{0.27^2}{0.40^2}=0.46$$

由于 $0.415<0.46<2.56$, 说明计算结果未落入否定域,接受 H_0^1: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$.

在 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 的基础上,检验:

H_0: $\mu_1=\mu_2$

其否定域为

$$\left|\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right| > t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)$$

查 t 分布分位数表得 $t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.975}(42)=2.021$.

$$s_w^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{25\times0.27^2+17\times0.40^2}{42}=0.1082,$$

$$s_w=0.329.\ \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=\sqrt{\frac{1}{26}+\frac{1}{18}}=0.307,\ \overline{x}-\overline{y}=-0.67.$$

由以上结果得

$$\left|\frac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right|=\frac{0.67}{0.329\times0.307}=6.63>2.021$$

落入了否定域，所以在 $\alpha=0.05$ 条件下，认为马和羊的每 100 毫升血清中无机磷含量有显著性差异.

习 题 八

1. 在产品检验时，原假设 H_0：产品合格. 为了使次品混入正品的可能性很小，在容量 n 固定的条件下，显著性水平应取大些，还是小些?

2. 由经验知道某种零件重量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 $\mu=15$，$\sigma^2=0.05$. 技术革新后，抽查 6 个样品，测得重量为(单位：克)：14.7, 15.1, 14.8, 15.0, 15.2, 14.6. 已知方差不变，问平均重量是否仍为 15 (取显著性水平 $\alpha=0.05$)?

3. 正常人的脉搏平均为 72 次/分，某医生测得 10 例慢性四乙基铅中毒患者的脉搏(次/分)：54, 67, 68, 78, 70, 66, 67, 70, 65, 69. 已知脉搏服从正态分布，问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 条件下，四乙基铅中毒患者与正常人的脉搏有无显著性差异?

4. 用热敏测温仪间接测量地热勘探井底温度，重复测量 7 次，测得温度(℃)：112.0, 113.4, 111.2, 112.0, 114.5, 112.9, 113.6. 而用某精确办法测得温度为 112.6(可看作真值). 试问在 $\alpha=0.05$ 条件下，用热敏电阻测量仪间接测温有无系统偏差?

5. 机床厂某日从两台机器所加工的同一种零件中，分别抽取 11 个和 9 个样品测量其尺寸为(单位：厘米)

第一台机器：6.2, 5.7, 6.5, 6.0, 6.3, 5.8, 5.7, 6.0, 6.0, 5.8, 6.0;

第二台机器：5.6, 5.9, 5.6, 5.7, 5.8, 6.0, 5.5, 5.7, 5.5 .

已知零件尺寸服从正态分布，问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 条件下，加工精度(方差)是否有显著性差异.

习题答案

高等数学

习　题　一

1. (1) $0\leqslant x<2$ 和 $2<x<3$，即　$x\in[0,2)\cup(2,3)$.

(2) $4n^2\pi^2\leqslant x\leqslant(2n+1)^2\pi^2$，　$n=0,1,2,\cdots$

(3) $-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$.

2. $f[g(x)]=\begin{cases}1, & 1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3},\\ 0, & |x|<1 \text{ 及 } |x|>\sqrt{3}.\end{cases}$

3. (1) 奇.　(2) 偶.　(3) 非奇、非偶.　(4) 奇.

5. (1) $\dfrac{1}{3}$.　(2) $\dfrac{1}{2}$.　(3) $\dfrac{4}{3}$.

(4) 原式 $=\begin{cases}0, & a=1,\\ -1, & 0<a<1,\\ 1, & a>1.\end{cases}$

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.　(6) $\dfrac{q}{p}$.

6. (1) 1.　(2) b.　(3) 0.

8. (1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.　(2) $\sqrt{3}$.　(3) e^{-2}.　(4) $e^{-\frac{a^2}{2}}$.

9. (1) 3 阶. (2) $\frac{1}{3}$ 阶. (3) 3 阶.

10. (1) a. (2) $-\frac{1}{12}$. (3) $\frac{2}{\pi}$.

习 题 二

1. $a=\frac{3m^2}{2c}$, $b=-\frac{m^2}{2c^3}$.

2. (1) $-\frac{1}{\cos x}$. (2) $\frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}$, $x\neq\pm1$.

(3) $\frac{a^2+b^2}{(x+a)(x^2+b^2)}$.

3. (1) $y\cdot\left[\frac{2-x}{x(1-x)}+\frac{x-9}{2(9-x^2)}\right]$.

(2) $(1+x^2)^x\cdot\left[\ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}\right]$.

4. (1) $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}\mathrm{d}x$. (2) $\frac{e^y}{2-y}\mathrm{d}x$.

(3) $-\frac{2\sqrt{xy}+y}{2\sqrt{xy}+x}\mathrm{d}x$. (4) $-\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}\mathrm{d}x$.

5. $y=-\frac{1}{2}x+1$, $y=-2x+1$.

6. (1) $\frac{3}{2}(1+t)$, $\frac{3}{4(1-t)}$.

(2) $-\frac{b}{a}\cot(t)$. $-\frac{b}{a^2\sin^3 t}$.

7. (1) $4\cdot(6!)$, 0. (2) $n!\left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}+\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]$.

(3) $2^{n-1}\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

8. (1) $\dfrac{m}{n}a^{m-n}$.　(2) $-\dfrac{1}{6}$.　(3) $-\dfrac{e}{2}$.　(4) 2.

(5) 0.　(6) $e^{-\frac{2}{\pi}}$.　(7) 4.

9. (1) 1.　(2) 2^{-7}.

12. 矩形的边长分别为 $a\sqrt{2}$，$b\sqrt{2}$.

13. (1) 2.　(2) $\dfrac{1}{18}\cdot(37)^{3/2}$.

习　题　三

1. (1) $-\dfrac{1}{\ln x}+C$.　(2) $\dfrac{\ln x}{1-x}+\ln|x-1|-\ln x+C$.

(3) $\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{8}\sin 2x+\dfrac{1}{16}\sin 4x+\dfrac{1}{24}\sin 6x+C$.

(4) $x^2\sqrt{1+x^2}-\dfrac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}+C$；或：

$\dfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}-\sqrt{1+x^2}+C$.

(5) $\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x+C$.

(6) $-\sqrt{4x-x^2}+2\arcsin\dfrac{x-2}{2}+C$.

(7) $\dfrac{2}{3}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|+\dfrac{1}{x-2}+C$.

(8) $-\dfrac{1}{x}\arctan x+\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)-\dfrac{1}{2}(\arctan x)^2+C$；

或：$-\arctan x\cdot\cot(\arctan x)+\ln|\sin(\arctan x)|-\dfrac{1}{2}(\arctan x)^2+C$.

(9) $\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\arctan\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}+C.$

(10) $\dfrac{a^2x}{\sqrt{a^2-x^2}}+\dfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}-\dfrac{3}{2}a^2\arcsin\dfrac{x}{a}+C.$

(11) $\dfrac{1}{2}\arctan t-\dfrac{5}{6}\arctan\dfrac{t}{3}+C$, 其中 $t=\tan\dfrac{x}{2}$.

(12) $-2\left[x\cdot\sqrt{e^{-x}+1}+2\sqrt{e^{-x}+1}+\ln\dfrac{\sqrt{e^{-x}+1}-1}{\sqrt{e^{-x}+1}+1}\right]+C.$

2. $x+\ln(x-1)^2+C.$

3. (1) $\ln\dfrac{16}{9}$.　　(2) $4\sqrt{2}-1.$　　(3) $\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}\ln 2.$

(4) $\dfrac{3}{32}\pi.$　　(5) 2.　　(6) $\ln(2+\sqrt{3})-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(7) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2}).$　　(8) $-\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{4}\ln 3.$

4. (1) $\dfrac{2}{\pi}$.　　(2) $\dfrac{1}{1+p}$.　　(3) $\dfrac{\pi^2}{4}$.

7. $\pi^2-2.$

8. $\dfrac{1}{2}\pi^2-\dfrac{2}{3}\pi.$

9. $2450\pi R^4$(J).

习　题　四

1. 0, 0, -1 或 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,0

2. 满足 $\lambda=2\mu$ 的 λ 与 μ 都适合条件.

3. (1) -8;　　(2) -80;　　(3) -1;

(4) $-\dfrac{4}{9\sqrt{5}}$.

4. $\sqrt{17+6\sqrt{3}}$.

6. (1) $-\dfrac{10}{3}$; (2) 6; (3) $k<-\dfrac{10}{3}$.

7. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\{-4, -5, 5\}$, 面积 $=\sqrt{1547}$.

8. (1) 2; (2) $\{0, -1, -1\}$; (3) $\{2, 1, 21\}$.

10. $2y+z+3=0$. 11. $x+y+z=3$.

12. 方程为(1) $By+Cz+D=0$; (2) $By+Cz=0$

(3) $Cz+D=0$; (4) $By+D=0$.

13. $7x+4y+2z-17=0$.

14. $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$.

16. $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$.

18. (1) $\arccos\dfrac{2}{15}$; (2) $\dfrac{\pi}{2}$.

19. 直线在平面上，夹角为 0.

20. $4x+3y-6z+18=0$.

21. $2\sqrt{\dfrac{19}{22}}$.

习 题 五

1. $u'_x=\dfrac{z}{x}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, $u'_y=-\dfrac{z}{y}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, $u'_z=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z\ln\dfrac{x}{y}$.

2. $\mathrm{d}u\Big|_{(0,1,2)}=\dfrac{\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+4\mathrm{d}z}{5}$.

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2}$ $(xy\neq 1)$.

5. $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\frac{\partial z}{\partial u}+2x\frac{\partial z}{\partial v}+2y\frac{\partial z}{\partial w}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=2y\frac{\partial z}{\partial u}-2y\frac{\partial z}{\partial v}+2x\frac{\partial z}{\partial w}$.

6. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f_1'+\frac{1}{yz}f_2'$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}f_1'-\frac{x}{y^2z}f_2'$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{x}{yz^2}f_2'$.

7. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{y^2}f_{uu}''-\frac{2}{x^2}f_{uv}''+\frac{y^2}{x^4}f_{vv}''+\frac{2y}{x^3}f_v'$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2}{y^4}f_{uu}''-\frac{2}{y^2}f_{uv}''+\frac{1}{x^2}f_{vv}''+\frac{2x}{y^3}f_u'$.

8. $du=2x(f_1'+y^2f_2'+y^2z^2f_3')dx+2x^2y(f_2'+z^2f_3')dy$
$+2x^2y^2zf_3'dz$.

9. $\operatorname{grad} z\Big|_{(x_0,\,y_0)}=\frac{1}{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2}\{y_0-b,\ a-x_0\}$.

10. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=-1$.

11. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}$.

12. $dz=\frac{1}{F_2'-F_3'}[(F_1'-F_3')dx+(F_2'-F_1')dy]$.

14. $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{yu-xv}{x^2+y^2}$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$ $(x^2+y^2\neq 0)$.

15. (1) 当 $x=1$, $y=1$ 时有极小值 $z=-1$;
(2) 当 $x=0$, $y=0$ 时有极小值 $z=0$.

16. 当 $x=\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}$, $y=\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}$ 时,有极大值 $z=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

17. $\dfrac{7}{4\sqrt{2}}$.

18. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$, $x+y+2z=4$.

19. $2x+4y-z-5=0$, $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-5}{-1}$.

20. $z=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}(x-y)$, $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-\pi/4}{2}$.

21. $x+2y-4=0$, $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{0}$.

习 题 六

1. $\dfrac{p^5}{21}$. 2. $(e-1)^2$. 3. $\pi-2$.

4. $\dfrac{32}{45}$. 5. $\dfrac{1}{3}\left(\pi-\dfrac{4}{3}\right)R^3$. 6. $\dfrac{1}{180}$.

7. $\dfrac{4}{15}\pi a^5(l+m+n)$. 8. $\dfrac{\pi}{6}h^4$.

9. $\dfrac{2}{3}\pi[(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}-h^3-a^3]$. 10. $\dfrac{1}{5}\pi R^5(2-\sqrt{2})$.

11. $2\pi abc\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{2}-\dfrac{7}{12}\right)$.

13. $2\pi a^2$.

14. $\frac{2}{3}\pi a^2(2\sqrt{2}-1)$.

15. $\frac{16}{3}\pi\rho$（ρ 为体密度）.　16. $\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

17. $2a^2$.　18. 17.

19. $-\frac{1}{20}$.　20. $2\pi a^2(\cos\beta-\sin\beta)$.

21. 1.　22. $\frac{1}{8}\pi m a^2$.　23. πR^3.　24. $\frac{12}{5}\pi a^5$.

习　题　七

1. 收敛.　2. 收敛.

3. 收敛.　4. 收敛.

5. 收敛.　6. 发散.

7. 收敛.　10. 条件收敛.

11. 条件收敛.

12. 当 $0<\alpha<1$ 或 $\alpha=1$ 且 $0<\beta\leqslant 1$ 时条件收敛；当 $\alpha>1$ 或 $\alpha=1$ 且 $\beta>1$ 时绝对收敛.

13. $(0, +\infty)$.　14. c.

15. $(-a, a)$;　$[-a, a)$.　16. 均为 $(-1, 1)$.

17. $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$，　$-1<x<1$.

18. $$S(x)=\begin{cases}1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x), & 0<|x|<1,\\ 0, & x=0,\\ 1-2\ln 2, & x=-1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

19. $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $\quad -\infty<x<+\infty$.

20. $x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $\quad -1\leqslant x\leqslant 1$.

习 题 八

1. $\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{2}a_2x^2+a_1x+a_0$.

2. $(1+x^2)(1+y^2)=Cx^2$.

3. $1+4cz-c^2x^2=0$.

4. $x+2y+3\ln|2x+3y-7|=C$.

5. $2(x-1)e^x+y^2+1=0$.

6. $y=e^x+cx$.

7. $y=(e^x+c)(x+1)^n$.

8. $cx^2y^2+2xy^2-1=0$.

9. $xy^{-3}+\frac{3}{4}x^2(2\ln x-1)=C$.

10. $y=c_1+c_2e^x+c_3e^{-x}$.

11. $(0.1x-0.12)\cos x-(0.3x+0.34)\sin x$.

12. $e^{3x}\left(\frac{6}{37}\sin x-\frac{1}{37}\cos x\right)$.

13. $-\frac{1}{30}\cos 4x-\frac{1}{6}\cos 2x$.

14. $xe^x(a_0x^2+a_1x+a_2)$.

15. $x^3e^{-x}(a_0x+a_1)$.

16. $ke^x+(a_1x+a_2)\cos x+(a_3x+a_4)\sin x$.

17. $y=x(c_1+c_2\ln|x|+c_3\ln^2|x|)$.

18. $x=-\frac{2}{3}\cos t-\frac{4}{3}\sin t+\frac{2}{3}\sin 2t+\frac{2}{3}\cos 2t-5t$;

$y=-\frac{2}{3}\sin t+\frac{1}{3}\sin 2t-2t+1$.

19. $y=c_1e^x+c_2e^{6x}+\frac{1}{2}e^{2x}$; $\quad z=c_1e^x-\frac{3}{2}c_2e^{6x}-\frac{1}{4}e^{2x}$.

20. $x=-\cos t-2\sin t$,　　$y=3\cos t+\sin t$.

线 性 代 数

习 题 一

1. -98.　　2. $(-1)^{n-1}(n-1)$.

3. 40.　　4. $-2(x^3+y^3)$.

5. $x=2$ 或 3.　　6. $a(b-a)(c-b)$.

7. 0.　　8. $(be-cd)^2$.

习 题 二

1. $$B=\begin{bmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{bmatrix}.$$

2. $$(A-2I)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

3. (1) $A(C-B)^T=I$,

(2) $$A=[(C-B)^{-1}]^T=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}.$$

4. $$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

6. $$A^n=3^{n-1}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}.$$

7. $|A+I|=0$.　　8. $r(AB)=2$.

9. $t=-3$.

10. (2) $AB^{-1}=P(i,j)$（即单位矩阵互换第 i 与第 j 行后的矩阵）.

11.
$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

12. $|(3A)^{-1}-2A^*|=-\dfrac{16}{27}$.

13.
$$X=\begin{bmatrix}3&-1\\2&0\\1&1\end{bmatrix}.$$

14.
$$X^{-1}=\begin{bmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{bmatrix}.$$

15. $|C|=(-1)^{mn}ab$.

16.
$$B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

17. $|A-\lambda I|=\lambda^{10}-10^{10}$.

18.

(2)
$$A=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

19. $|2A^*B^{-1}|=\dfrac{-2^{2n-1}}{3}$.

习 题 三

1. $|A+B|=40$.　　2. $r(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)=2$.

3. $(1,\ 1,\ -1)$.

6. (1) 当 $b\neq2$ 时，β 不能由 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ 线性表示；

(2) 当 $b=2$时，若 $a\neq1$ 则 $\beta=-\alpha_1+2\alpha_2$(惟一表示)，若 $a=0$ 则 $\beta=(-\lambda-2\mu)\alpha_1+(2\lambda+\mu)\alpha_2+\mu\alpha_3$，其中 $\lambda,\ \mu$ 为任何实数(有无穷多种表示)．

7. $t=3$.

8. 当 s 为奇数时，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关；
当 s 为偶数时，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性相关．

9. 当 $t\neq 1$ 时，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关；$t=1$ 时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关．

11. (1) 当 $p\neq 2$ 时，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，此时 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4$，其中 $k_1=2$，$k_2=\dfrac{3p-4}{p-2}$，$k_3=1$，$k_4=\dfrac{1-p}{p-2}$；

(2) 当 $p=2$ 时，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关，此时 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)=3$，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为一极大线性无关组．

12. 选 D.　　　　13. 选 A.

14. 答 (1) $\lambda=-3$；(2) $\lambda\neq -3$ 且 $\lambda\neq 0$；(3) $\lambda=0$.

15. 选 B.

习　题　四

1. $\gamma_0=\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, 0, 0, 0\right)$；　$\eta_1=\left(0, \dfrac{-1}{2}, 0, 1, 0\right)$，$\eta_2=\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{6}, 0, 0, 1\right)$；　$\gamma=\gamma_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2$.

2. (1) $a=0, b=2$；　(2) $\eta_1=(1, -2, 1, 0, 0)$，$\eta_2=(1, -2, 0, 1, 0)$，$\eta_3=(5, -6, 0, 0, 1)$；

(3) 一个解向量 $\gamma_0=(-2, 3, 0, 0, 0)$，通解为 $\gamma=\gamma_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2+c_3\eta_3$.

3. $a=\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{3}{2}$；　$(x_1, x_2, x_3)=(-1, 2, 0)+c(-2, 3, 1)$.

4. $k\neq -1$ 且 $k\neq 4$ 时，方程组有惟一解；
$k=-1$ 时，方程组无解；

$k=4$ 时，方程组有无穷多组解，通解为

$(x_1, x_2, x_3)=(0, 4, 0)+c(-3, -1, 1)$.

5. (1) $\lambda=1$; (2) $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$; (3) $\lambda=-2$.

6. $c=1, 2$ 或 -2.

7. 证 若 $\gamma=(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 是一解向量，则 $\overline{\gamma}=(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \cdots, \overline{k}_n)$ 也是一个解向量，因此 $\frac{1}{2}(\gamma+\overline{\gamma})$ 也是一个解向量，且它是实的.

8. 当 $t=7$ 时，方程组当且仅当 $\theta=-1$ 时有解.

9. (1) $(0, 0, 1, 0)$, $(-1, 1, 0, 1)$;

(2) $k(-1, 1, 1, 1)$，其中 k 为不等于 0 的任意常数.

习 题 五

1. $\frac{3}{4}$.

2. $x=1, y=-2, z=5$ 或 $x=1, y=5, z=-2$.

3. $TrA=0$. 4. $x+y=0$.

6.
$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 6 & -1 & -1\end{bmatrix},\quad A^5=PB^5P^{-1}=PBP^{-1}=A.$$

7. (1) $\alpha_3=k(1, 0, 1)'$，k 为不等于 0 的常数;

(2)
$$A=\begin{bmatrix}\frac{13}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{5}{6}\\ \frac{-1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{13}{6}\end{bmatrix}.$$

8. (1) $a=-3$, $b=0$, $\lambda=-1$;

(2) A不能对角化，因为$\lambda=-1$为A的三重特征值，但只有一个线性无关的特征向量ξ.

9. (1) $A^2=0$；　(2) A的特征值全为0，特征向量全体为$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}$，$k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$为不同时为零的任意常数，其中设$b_1\neq 0$时，$\alpha_1=\left(-\frac{b_2}{b_1}, 1, 0, \cdots, 0\right)'$，

$\alpha_2=\left(-\frac{b_3}{b_1}, 0, 1, 0, \cdots, 0\right)', \cdots, \alpha_{n-1}=\left(-\frac{b_n}{b_1}, 0, \cdots, 0, 1\right)$.

10. (1) $\beta=2\xi_1-2\xi_2+\xi_3$;

(2)
$$A^n\beta=\begin{bmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{bmatrix};$$

(3)
$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\6&-11&6\end{bmatrix}.$$

11. $a=2$, $b=-3$, $c=2$, $\lambda_0=1$.

习　题　六

1. $-1<t<1$.　　2. $\alpha=\beta=0$.

6.
$$D=\begin{bmatrix}(k+2)^2&0&0\\0&(k+2)^2&0\\0&0&k^2\end{bmatrix},$$
$k\neq-2$且$k\neq 0$时，B为正定矩阵.

7. (1) $y=2$,　(2)
$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-\frac{4}{5}\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

8. $$T=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$ 标准形为 $7y_1^2+7y_2^2-2y_3^2$.

概率论与数理统计

习 题 一

1. $\frac{1}{60}$. 2. $\frac{9}{14}$. 3. (1) C_{37}^5/C_{40}^5. (2) $C_3^2 \cdot C_{37}^3/C_{40}^5$.

4. (1) $\frac{132}{169}$. (2) $\frac{37}{169}$. (3) $\frac{168}{169}$. 5. $C_{2n}^n \cdot C_{2n}^n/C_{4n}^{2n}$.

6. (1) $1-364^{500}/365^{500}\approx 0.746$. (2) $1-A_{12}^4/12^4\approx 0.427$.

7. $\frac{1}{15}$.

8. 设 A_i="杯中球的最大个数为 i", $i=1,2,3$. $P(A_1)=\frac{3}{8}$, $P(A_2)=\frac{9}{16}$, $P(A_3)=\frac{1}{16}$.

9. (1) $1-C_{42}^{15}/C_{45}^{15}$. (2) $3^{15}/C_{45}^{15}$.

10. (1) $P(A)=\frac{1}{n-1}$, $n\geqslant 2$, $P(B)=\begin{cases} \frac{6}{(n-1)(n-2)}, & n\geqslant 4, \\ 1, & n=3. \end{cases}$

(3) $P(A)=\frac{1}{n}$, $n\geqslant 2$, $P(B)=\frac{6}{n(n-1)}$, $n\geqslant 3$.

11. (1) $\frac{1}{120}$． (2) $\frac{3}{10}$．　12. (1) 0.1． (2) 0.176.

13. (1) 为假．　(2) 为假．　(3) 为假．　(4) 为真．
(5) 为真．　(6) 为假．

14. $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$．　15. $\frac{2}{1+m}$．　16. $\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$．　17. 0.965.

18. (1) 0.15．　(2) 0.5．　19. 0.104．　20. 0.6．

习　题　二

1. X 服从 $n=30$, $p=0.8$ 的二项分布，即 $X\sim B(30,\ 0.8)$. 分布律为 $P\{X=k\}=C_{30}^{k}0.8^{k}\cdot 0.2^{30-k}$, $k=0,1,2,\cdots,30$.

2. 设点数之和为 X, X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\begin{cases}\dfrac{k-1}{36}, & k=2,3,\cdots,7;\\[2mm] \dfrac{13-k}{36}, & k=8,9,\cdots,12.\end{cases}$$

3. 设投掷次数为 X, X 服从参数 $p=\frac{1}{2}$ 的几何分布，

$$P\{X=k\}=\left(\frac{1}{2}\right)^k,\qquad k=1,2,\cdots.$$

4. $P\{X=4\}=\frac{2}{3}e^{-2}\approx 0.902$.

5. 本题可用泊松定理求解．至少应配备 8 名工人．

6. X 的可能取值为 3,4,5, 分布律为 $P\{X=3\}=0.1$, $P\{X=4\}=0.3$, $P\{X=5\}=0.6$, 分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<3;\\ 0.1, & 3\leqslant x<4;\\ 0.4, & 4\leqslant x<5;\\ 1, & x\geqslant 5.\end{cases}$$

7. (1) $C=\frac{1}{\pi}$. (2)

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ \frac{1}{\pi}\arcsin x+\frac{1}{2}, & -1\leqslant x<1;\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

(3) $\frac{1}{3}$.

8. (1) $\Phi\left(\frac{5}{3}\right)\approx 0.95254$. (2) $2\Phi\left(\frac{4}{3}\right)-1\approx 0.81648$.

9.

Y	0	1	4	9
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

10.

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

11. 0.2427.

12.

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}\left(\frac{2}{9\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot y^{-\frac{2}{3}}, & \frac{\pi}{6}a^3\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{6}b^3;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中，Y 为球的体积的计算值.

13.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{R^2-x^2}}, & x<R;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

14. (1) $\frac{1}{2}$, (2) $\frac{1}{2}$.

15. (1) $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{\pi}$; (2) $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty<x<+\infty$.

(3) $\frac{3}{4}$.

16.

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0;\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

17. $\sqrt{2}$.

18. (1) $A=B=\frac{1}{4}$ ， (2)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & -1\leqslant x<0;\\ \frac{1}{2}(x+1), & 0\leqslant x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

19. 1288.

习 题 三

1.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)(d-c)}, & a\leqslant x\leqslant b,\quad c\leqslant y\leqslant d;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{d-c}, & c\leqslant y\leqslant d;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

X 与 Y 相互独立.

2. (1) $\frac{3}{\pi R^3}$. (2) $\frac{3r^2}{R^2}\left(1-\frac{2r}{3R}\right)$.

3. (1) $\frac{1}{2}$.

(2) $$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\sin x+\cos x), & 0<x<\frac{\pi}{2};\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\sin y+\cos y), & 0<y<\frac{\pi}{2};\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3) 不独立. (4) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$.

4. (1) $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{6}y^3e^{-y}, & y>0;\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$ (2) $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{120}z^5e^{-z}, & z>0;\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$

5.

$$f_Z(z)=\begin{cases}(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)z}, & z>0;\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

6.

$$f_Z(z)=\begin{cases}2\lambda(1-e^{-\lambda z}), & z>0;\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

7.

$$f_Z(z)=\begin{cases}z, & 0<z\leqslant 1;\\ 2-z, & 1<z\leqslant 2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

8.

$$f_Z(z)=\begin{cases}ze^{-\frac{z^2}{2}}, & z>0;\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

9. $2\Phi(1)-1=0.6826$.

10. $1-2e^{-2}$.

11. $\frac{1}{2}$.

习 题 四

1. $\frac{25}{16}$. 2. 44.64 分. 3. $E(X)=0$, $D(X)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}$.

4. $E(X)=0$, $D(X)=2$. 5. $R^2/2$. 6. $\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

7. $E(X)=\frac{7}{2}n$, $D(X)=\frac{35}{12}n$. 8. $M\left[1-\left(1-\frac{1}{M}\right)^n\right]$.

9. 0. 10. 4. 11. $\frac{1}{e^\lambda-1}$. 12. $\frac{1-(1-p)^n}{p}$. 13. $\frac{n}{m}$.

14. $D(X+Y)=2(1+\rho)\sigma^2$, $D(X-Y)=2(1-\rho)\sigma^2$. 15. $-\frac{1}{2}$.

习 题 五

1. 0.952. 2. 不超过 0.0124，良种范围为 925 ~ 1075(粒)

3. 14 条外线. 4. 至少掷 68 次. 5. 0.3482.

习 题 六

1. (1) 99.93, 1.43. (2) 67.4, 35.2.

(3) 112.8, 1.29. (4) 100.98, 1.47.

2. (1) 1.058122, 2.575829, −3.09023, −0.67449.

(2) 1.237, 12.443, 21.026, 34.805.

(3) 2.131, −2.998, 1.645.

(4) 4.00, 2.91, 0.306.

3. (1) 20.090. (2) 17.535. (3) 4.601. (4) 5.229.

4. (1) 1.476. (2) 0.920.

5. (1) 4.76. (2) 0.112.

习 题 七

1. $\hat{\mu}_2$ 最好.　　2. $\dfrac{\overline{X}}{m}$.　　3. $\dfrac{-n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$, $\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$.

4. (14.82, 15.30).　　5. (1485.69, 1514.31), (13.8, 36.5).

6. (−6.19, 17.69).

习 题 八

1. 应把 α 取大些.
2. 认为零件的重量仍为 15(克).
3. 认为四乙基铅中毒者和正常人的脉搏有显著性差异.
4. 测量无系统差异.
5. 认为两台机器加工的零件的尺寸的精度无显著性差异.